ep

BIBLIOTECA DE FILOZOFIE ŞI SOCIOLOGIE

GH. ENESCU

LOGICĂ ŞI ADEVĂR

Prefaţă

Logica modernă i se înfățișează celui neinițiat ca un lung lanț de formule. Pentru el această aparență — „lanțul de formule“ — este însăși esența logicii moderne. Dar nu numai celui neinițiat lucrurile i se par a sta astfel. Există un soi de specialist, certat în mare măsură cu limbajul obișnuit, „algoritmistul“, pentru care formula nu are alt sens decît acela operațional. Dacă lucrurile ar corespunde acestei viziuni de neinițiat sau de specialist mărginit logica modernă n-ar fi în acest caz decît „scolastică în simboluri“. Și totuși, formula, calculul, algoritmul nu reprezintă altceva decît mijloace adecvate și eficiente, iar mijloacele fie ele practice sau teoretice sînt destinate să rezolve problemele care apar în activitatea noastră. Desigur că omul are această capacitate extraordinară de a se sustrage în cercetare nevoilor imediate. Pe de altă parte însă nu putem uita de interesele sociale practice, nu putem lucra numai pentru „satisfacția intelectuală“. O idee este sterilă dacă ea nu-mi poate răspunde în nici un fel la întrebarea „ce pot să construiesc cu această idee?“.

Se poate spune că logica modernă sub anumite aspecte corespunde ideii de constructivitate, dar nu pe măsura posibilităților ei. Ea a găsit legături cu practica (tehnica calculatoarelor și în genere cibernetica industrială), cu educația (prin dezvoltarea învățării programate), cu științele speciale (mai ales cu matematica). Construcția socialismului cere folosirea celor mai înaintate mijloace de organizare și conducere a economiei naționale. Un rol deosebit de important îl au calculatoarele electronice și automatizarea. „Rezultate superioare, arată tovarășul Nicolae Ceaușescu, se obțin în producție pe baza mijloacelor tehnice moderne de calcul și automatizare, a instrumentelor de analiză oferite de cele mai noi domenii ale matematicii, ciberneticii și informaticii economice“[1]. Or construcția și utilizarea calculatoarelor electronice este imposibilă fără utilizarea aparatului logico-matematic, în speță a algebrei logice. În ciuda faptului că logica matematică

[1] Nicolae Ceaușescu. *Cuvîntare la plenara C.C. al P.C.R. din 21–23 decembrie 1966*, Editura politică, p. 40.

este o disciplină extrem de abstractă ea își găsește largi aplicații în producția modernă, în organizarea și conducerea activității economice. O anumită atitudine dogmatică a ținut-o ani de-a rîndul departe de filozofia materialist dialectică și chiar de... logicieni. La noi lucrările cu titlul „Logica tehnică", „Logica în procesul de învățămînt", „Analiza logică în construcția teoriilor fizicii, chimiei, biologiei etc." se lasă așteptate. Marile probleme filozofice pe care le-a adus în scenă logica modernă au fost mai mult invocate decît analizate.

Filozofia materialist dialectică este o știință. Ea își trage seva din analiza marilor probleme care apar în dezvoltarea științelor particulare, a societății, a artei, a culturii în genere. Există însă naivi care cred că este suficient să iei cunoștință de cîteva texte clasice pentru a putea face filozofie. Se pornește probabil de la ideea că concluziile filozofiei fiind simple, în cazul că chiar nu confundă filozofia cu truismele la îndemîna oricui, drumul care duce la aceste concluzii este la fel de simplu. Se uită pe ce Mont-Blanc de fapte s-au sprijinit Aristotel, Descartes, Leibniz, Kant, Hegel, Marx, Engels, Lenin pentru a ajunge la aceste concluzii simple. Dar nu trebuie să se confunde procesul de popularizare a științei cu acela de creare a ei. Sîntem cu toții de acord că o știință își îndeplinește cu atît mai bine rosturile cu cît răspunde la mai multe probleme importante pe care i le pune epoca. Pentru aceasta ea trebuie să facă uz de toate mijloacele practice și teoretice care îi stau la îndemînă la un moment dat. Din punct de vedere teoretic cele mai eficiente mijloace pe care le avem la dispoziție astăzi sînt mijloacele matematice și cele logice (în speță logica matematică). Mijloacele logice sînt necesare oricărei științe pur și simplu pentru că nu poate exista știință fără argumentare, fără demonstrație. Se poate oare filozofia dispensa de argumentare? În acest caz ea ar înceta să mai fie știință.

Poate ea să se lipsească de analiza marilor probleme care se pun în fața dezvoltării științei? În caz că da, ea ar pierde calitatea de metodă generală de gîndire. Cu toate că nu sîntem de acord cu o asemenea situație în principiu, practic am acceptat-o multă vreme. Disputele filozofice din fundamentele mate-

maticii, care au influențat atîta dezvoltarea acestei științe, ne-au rămas multă vreme străine. De ce? Poate, în parte, pentru că nu ne-am încumetat să reanalizăm din punctul nostru de vedere faptele supuse discuției. Convingerea mea este că nu poți participa cu competență la discuția filozofică asupra faptelor științei dacă nu ești în stare să reanalizezi *faptele pe care le invocă interlocutorul, precum și altele de acest fel. Oricît de greu ar fi acest lucru noi trebuie să ne străduim să-l facem, dacă vrem ca filozofia să-și îndeplinească rolul ei de călăuză a dezvoltării științelor.*

Am încercat în această carte să aduc în fața cititorului o parte din acele probleme care preocupă de mai bine de șaptezeci de ani mintea unora dintre cei mai de seamă oameni de știință. M-am străduit să argumentez punctele de vedere, să repun în discuție faptele acolo unde n-am fost satisfăcut de analiza deja dată. Știu că în asemenea discuții avem puține drepturi și multe obligații. Măcar o parte din aceste obligații sper să le fi îndeplinit. Voi fi bucuros de orice observație argumentată.

Dr. GH. ENESCU

Capitolul I

Logicism sau matematism?

1. NUMĂRUL ESTE UN ATOM DEMOCRITIC?

De mii de ani matematica joacă un rol uriaş în dezvoltarea cunoaşterii, tehnicii şi producţiei. Influenţa ei asupra tuturor laturilor activităţii omeneşti a devenit pe zi ce trece mai mare. Fără matematică, o istorie a cunoaşterii, a tehnicii, a producţiei este de neconceput. Stîrnind mereu interesul şi uimirea, ea a intervenit din cele mai vechi timpuri în toate întrebările permanente ale spiritului omenesc: care este natura existenţei?, ce este cunoaşterea şi cum este ea posibilă? Model de cunoaştere precisă şi evidentă, matematica a stîrnit entuziasmul „mistic" al pitagoricilor şi uimirea lucidă a modernilor. Pentru pitagorici, lumea era număr şi armonie. Certitudinea şi evidenţa adevărurilor matematice sînt exemplare pentru întreaga cunoaştere. Cunoaşterea ar progresa mult mai repede dacă am gîndi pretutindeni *în mod matematic* *(Descartes)* şi disputele s-ar încheia cu mai mult succes dacă în loc să vorbim am calcula *(Leibniz)*. Veacurile XVI—XIX aduc succese peste succese. Descartes introduce mişcarea în matematică prin extensiunea pe care o dă utilizării variabilelor *(Engels)*. Newton şi Leibniz aduc în faţa cunoaşterii matematice problemele infinitului prin întemeierea calculului integral şi diferenţial, Lobacevski, Bolyai, Riemann se avîntă pe căile geometriei „absolute", iar Georg Cantor ne introduce în „raiul" *(Hilbert)* mulţimilor transfinite. Universul matematic creşte enorm, depăşind posibilităţile de comprehensiune ale unui singur om. Însă acest univers în expansiune suferea de o lipsă acută de unitate. Iată deci o nouă problemă în faţa matematicienilor: ***matematica nu trebuie doar să descopere ordinea din lucruri, ci ordinea trebuie descoperită sau, dacă nu, introdusă în lumea ideilor matematice***. Aparatul însă, superbul aparat cu care omul dobîndise atîtea succese în descrierea cantitativă a realului, se dovedi incapabil să-şi dezvăluie unitatea şi teme-

lia, să creeze integritatea și sistemul abstracțiilor matematice. Privirile se întoarseră în altă parte. Grație unor spirite ilustre ca George Boole și Augustus de Morgan, matematicienii descoperiră pe Aristotel. *Ei luară de la Aristotel logica, oferind în schimb limbajul gîndirii matematice.* Reechipată cu ajutorul limbajului simbolic, logica nu numai că deveni un instrument eficace de ordonare și de fundamentare a cunoștințelor matematice, dar, reîntinerită, luă ea însăși un nou avînt în dezvoltare, în așa fel că, dacă în 1787 Immanuel Kant putea să aibă într-o anumită măsură dreptate scriind „dass sie auch bis jetzt keinen Schritt vorwärts hat thun können" (că ea de asemenea pînă acum n-a putut să facă nici un pas înainte)[1], în secolul al XIX-lea această afirmație ar fi devenit anacronică.

Dacă lăsăm la o parte geometria, care este de fapt prima aplicare a matematicii la „formele sensibile" (adică *o aplicare la formele spațiale pure)*, aproape întreaga matematică a fost supusă unei *aritmetizări* (unei reduceri logice la aritmetică). Succesul cel mai important pe această linie a fost aritmetizarea analizei matematice. Trebuie amintită aci contribuția unor matematicieni de vază, cum au fost Weiersstras (1815—1897), Dedekind (1831—1916), Méray (1835—1911) și Cantor (1845—1918).

Peano (1858—1932) a împins atît de departe analiza, încît a redus toată teoria numerelor naturale la trei concepte primitive („număr natural", „zero", „succesor") și cinci axiome.

Deoarece la baza analizei matematice fusese pus *continuul* numerelor reale, reducerea analizei matematice la aritmetică a însemnat în ultimă instanță reducerea numerelor reale la cele naturale. Faptul avea nu numai o deosebită importanță matematică, ci și una gnoseologică. „Încrederea într-un fel de intuiție geometrică obscură — scrie matematicianul american S. C. Kleene — fu înlocuită cu definirea numerelor reale ca fiind niște obiecte construite din numere naturale, întregi sau raționale. Prin aceasta, însușirile numerelor reale erau

---

[1] Immanuel Kant. *Kritik der reinen Vernunft*, Heidelberg, 1884, p. 22.

reduse în ultimă instanţă la însuşirile numerelor naturale"[1]. Se ştie că, mai mult ca oricare alt matematician, Descartes aşezase la baza cunoaşterii matematice *intuiţia*. Acum însă procedeele logice (definiţia, reducţia deductivă) începură să aibă prioritate, iar concepţia carteziană asupra cunoaşterii matematice să pălească. Matematicienii păreau să fie deosebit de satisfăcuţi de rezultatele obţinute. Într-un opuscul din 1900, Poincaré scria: „Astăzi, în analiză rămîn numai numere întregi, precum şi sisteme finite şi infinite de numere întregi, legate între ele de reţeaua relaţiilor de egalitate şi inegalitate", iar Kronecker îşi permitea să afirme că „die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk" (numerele întregi le-a făcut bunul dumnezeu, restul este opera omului). Progresele făcute în analiza matematică (şi aici trebuie amintită în primul rînd teoria numerelor transfinite a lui Cantor) însemnau îndeosebi o mai adîncă pătrundere în cunoaşterea infinitului. Hilbert scria că „analiza matematică poate fi numită, într-un anumit sens, simfonia unică a infinitului"[2]. Însă infinitul aducea cu sine „neliniştea metafizică". Procesul cunoaşterii este o nelinişte continuă şi iubitorii de certitudini absolute sînt primii dezamăgiţi. O minunată epigramă engleză redă exact situaţia psihologică în care ne aflăm adesea în ştiinţă:

„Natura şi legile ei erau ascunse în beznă,
Dar dumnezeu a spus «Să fie Newton!»
şi s-a făcut lumină.
Veni peste puţin diavolul şi exclamă:
«Să fie Einstein!»
şi totul reintră în beznă".

Matematica fusese unificată pe baza numărului natural, părînd astfel să dea justificare unei străvechi concepţii după care esenţa matematicii este numărul luat în accepţia sa cea mai uzuală. Un fel de atom democritic (analog cu cel din fizică)

---

[1] S. C. Kleene. *Introduction to Metamatematics*. New York-Toronto, D. van Nostrand Company, Inc., 1952, p. 30.

[2] David Hilbert. *Bazele geometriei*, ed. rusă, Moscova, 1948, p. 345.

părea să-şi fi făcut loc în matematică. Gottlob Frege a fost printre primii care au pus la îndoială caracterul absolut inanalizabil al numărului natural: *nu, numărul natural nu este nici pe departe o entitate atît de simplă pe cît se crede!* Folosind o terminologie logică-aritmetică nu îndeajuns de clară, Frege a izbutit totuşi să dea una dintre cele mai ciudate definiţii din cîte cunoaşte istoria ştiinţei: definiţia numărului cardinal. Dacă pînă la Frege logica jucase în cercetările matematice un rol mai mult indirect, o dată cu acesta ea devine în mod direct şi deschis instrumentul oricărui se preocupă de fundamentarea matematicii*. În concepţia lui Frege, dincolo de numărul natural nu se mai puteau afla decît raporturi de natură logică. Tocmai de aceea *a dizolva numărul natural în raporturi mai simple este tot una cu a-l defini în termenii logicii, iar într-un plan mai larg a reduce matematica la logică.* Ideea reducerii matematicii la logică a dat naştere unui întreg program de lucru, cunoscut astăzi sub denumirea de „programul lui Frege". Teza care afirmă că matematica este reductibilă (deductiv) la logică, cu alte cuvinte că prima nu este decît o ramură a celei de-a doua, poartă numele de „teza logicistă", iar concepţia care porneşte de la această teză se numeşte *logicism.*

Aşadar, Frege este întemeietorul unuia dintre curentele care s-au dezvoltat în procesul de fundamentare a matematicii, curentul logicist. Bertrand Russell, care a continuat şi a desăvîrşit opera lui Frege, atribuie paternitatea tezei logiciste lui Leibniz. La fel Kleene şi alţii. O incursiune cît de cît atentă în concepţia lui Leibniz stîrneşte îndoială cu privire la această afirmaţie a lui Russell. Leibniz împărţea adevărurile în două categorii: *adevăruri ale raţiunii*, bazate pe principiul noncontradicţiei (altfel spus, propoziţii identice ale căror opuse implică o contradicţie logică), şi *adevăruri de fapt*, bazate pe legea raţiunii suficiente. Toate adevărurile sînt judecăţi de forma „predicatul este cuprins în subiect", însă unele au în mod evident această formă, altele pot fi aduse (printr-un şir de operaţii)

* Expresia de „fundamentare a matematicii" este foarte des utilizată, şi ea desemnează procesul de construire a matematicii ca un sistem simplu, unitar şi necontradictoriu pe baza anumitor criterii logice.

la această formă. Dacă omul este pe deplin capabil să dezvăluie subiectul în predicat în cazul adevărurilor rațiunii, pentru adevărurile de fapt care ar cere în acest caz o analiză infinită Leibniz a acceptat ipoteza divinității, căci, spunea el, singur dumnezeu este capabil de o analiză infinită*.

Particularizînd ideile sale despre adevărurile rațiunii, Leibniz arată că din această categorie fac parte propozițiile logicii și matematicii. Cu alte cuvinte, Leibniz operează o grupare a propozițiilor logicii și matematicii în virtutea unei proprietăți comune: *a fi adevăruri ale rațiunii*. Aceasta înseamnează deocamdată o simplă cosubordonare a celor două mulțimi de adevăruri (o subordonare a lor unei a treia mulțimi). Leibniz n-a afirmat nicăieri în mod expres că mulțimea propozițiilor matematice poate fi redusă prin deducție la propoziții logice. Căci, așa cum s-a mai arătat, termenul de „adevăruri ale rațiunii" nu este riguros definit pentru a putea să-i dezvăluim implicațiile. Și, în ultimă instanță, acest termen pare a desemna o proprietate formală a propozițiilor, proprietate care în virtutea caracterului ei formal este independentă de conținutul „logic" sau „matematic" al propozițiilor. De altfel, Bertrand Russell însuși observă că „toate propozițiile logicii au o caracteristică care se exprima în sensul că sînt analitice, și propozițiile opuse lor ar fi în sine contradictorii. Această afirmație nu este satisfăcătoare. Legea contradicției nu este decît o singură propoziție logică; ea nu posedă nici o prioritate; dovada că inversa unei propoziții este contradictorie cere, în afară de legea contradicției, intervenția altor principii de deducție"[1]. Desigur prin aceasta Russell nu neagă existența concepției logiciste la Leibniz, ci insuficiența acestei concepții. Ceea ce este clar este faptul că Leibniz a fost preocupat de *unificarea logicii și matematicii*, însă nu este sigur că el a văzut lucrurile din același punct de vedere ca Frege și Russell. Trebuie să distingem în principiu între *dezvăluirea unității științelor și reductibilitatea lor*. Vom

---

* Despărțită de aspectele ei religioase, ipoteza poate căpăta o formă acceptabilă în domeniul previziunii evenimentelor așa-zise „întîmplătoare": dacă am fi capabili să descriem totalitatea condițiilor care precedă un fenomen întîmplător, atunci noi l-am putea prevedea.

[1] Bertrand Russell. *Introduction a la philosophie mathématique*, Paris, 1928, p. 241.

vedea însă că nici Frege, nici Russell sau alți logiciști nu s-au exprimat deschis în favoarea unei asemenea nuanțări.

Revenind la „programul lui Frege", precizăm că el cuprinde realizarea tezei logiciste în trei etape:

1) definirea noțiunilor matematice cu ajutorul noțiunilor logicii;

2) exprimarea propozițiilor matematice în termeni logici;

3) demonstrarea teoremelor matematice din axiome logice cu ajutorul regulilor logice. Logiciștii afirmă că acest program a fost îndeplinit grație eforturilor depuse de Frege, Dedekind și Peano (acesta mai ales în ce privește punctul doi din program), Whitehead și Russell. Frege dă o construcție în lucrarea sa *Grundlagen der Arithmetik*, iar Whitehead și Russell în monumentala operă *Principia Mathematica*. Vom vedea în continuare cum și cît s-a realizat din programul amintit.

Frege s-a străduit în primul rînd să dea o nouă definiție numărului. El consideră că numerele naturale sînt în fapt numere cardinale ale unor noțiuni. Expresia „număr cardinal al unei noțiuni", spune Frege, este doar o simplă prescurtare pentru expresia „sfera noțiunii care este egală numeric cu noțiunea *F*". La rîndul ei, expresia „noțiunea *G* egală numeric cu noțiunea *F*" este prezentată tot ca o prescurtare pentru următoarea expresie: „există o corespondență biunivocă între obiectele care cad sub noțiunea *F* și obiectele care cad sub noțiunea *G*". Această ultimă expresie poate fi ușor redată în termeni logici.

Poate să ne pară destul de ciudat faptul că Frege vorbește de „numărul cardinal al unei noțiuni". Într-adevăr, terminologia nu este prea fericit aleasă (asupra acestui lucru am atras deja atenția), însă cu puțin efort intenția expresiei poate fi pusă în evidență. Sfera noțiunii este tocmai mulțimea obiectelor la care se aplică notele noțiunii, iar un număr cardinal este numărul de obiecte pe care le conține o mulțime. Folosind un simbolism extrem de greoi[1], Frege a încercat să dea o construcție efectivă ideilor sale, construind pentru prima dată un sistem axiomatic logic-aritmetic. Prezentarea acestui sistem

[1] Vezi lucrarea noastră *Introducere în logica matematică*, București, 1965, p. 198–199.

nu este importantă pentru lucrarea de față și deci nu o vom face. Urmează în mod firesc întrebarea: a reușit Frege să ducă la bun sfîrșit programul propus? Un răspuns concis la această întrebare ni-l dau Fraenkel și Bar-Hillel în lucrarea *Foundations of set theory* (Fundamentele teoriei mulțimilor): „Chiar dacă Frege ar fi dobîndit un succes deplin în reducerea aritmeticii la logică — ceea ce totuși nu s-a întîmplat din cauza apariției antinomiilor în sistemul său —, aceasta nu ar fi însemnat că întreaga analiză ar fi fost redusă la logică, deși aritmetizarea analizei fusese efectuată. Acest lucru nu este nici pînă astăzi pe deplin înțeles și nici Frege nu l-a înțeles îndeajuns. Problema constă în aceea că aritmetizarea înseamnă, după expresia lui Poincaré, reducerea la «numere întregi și sisteme finite sau infinite de numere întregi», adică nu numai la numere întregi, ci și la ceea ce acum numim în mod obișnuit *mulțimi de numere întregi*"[1]. Cu alte cuvinte, Frege n-a izbutit să reducă la logică și teoria mulțimilor, sarcină pe care se afirmă că au îndeplinit-o Whitehead și Russell. Cu toate acestea, din construcția lui Frege rămîn cel puțin trei realizări importante: o definiție originală a numărului, primul calcul axiomatic al logicii (calculul propozițiilor) și un sistem logic-aritmetic (chiar dacă imperfect). Perfecționînd definiția dată de Frege, reconstruind logica prin prisma teoriei tipurilor (în scopul eliberării ei de antinomii), reanalizînd teoria mulțimilor și folosindu-se de un simbolism mult mai comod, Russell împreună cu Whitehead au realizat una dintre cele mai impresionante construcții științifice ale secolului nostru, *Principia Mathematica*. Principiile care au stat la baza acestei opere, concepția filozofică (logicistă) pe care autorii i-o asociază, sînt expuse în lucrarea lui Russell *Introducere în filozofia matematicii*, precum și într-o altă serie de lucrări ulterioare. În scopul de a da cititorului o imagine clară despre momentul cel mai interesant al concepției logiciste — definirea conceptului de număr —, vom urmări pe scurt prezentarea făcută de Russell în *Introducere în filozofia matematicii*.

---

[1] A. A. Fraenkel și Y. Bar-Hillel. *Foundations of Set Theory*, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1958, p. 162—163.

Începînd expunerea cu privire la cercetarea definiției numărului, Russell atrage atenția asupra unei confuzii care se face de obicei între *număr* și *pluralitate*. „Un număr — spune el — trebuie să fie caracteristica numerelor așa cum un om (conceptul de om. — *G.E.*) trebuie să fie caracteristica oamenilor.

O pluralitate nu este un exemplu de număr, ci ține de un număr determinat"[1]. Astfel, o pluralitate de trei oameni este un caz particular al numărului 3 și doar numărul 3 este un caz particular al numărului (în general). „Numărul 3 caracterizează ceva ce au cei trei (oameni. — *G.E.*) în comun, ceva ce-i distinge de toate celelalte mulțimi. Un număr este ceva ce caracterizează anumite mulțimi..."[2]. O „mulțime" este în accepția lui Russell același lucru cu „clasa" sau „grupul". Există două moduri de a defini clasele (mulțimile): prin enumerarea componentelor (de exemplu spunînd: „grupul pe care l-am văzut constă din Ion, Gheorghe, Vasile") și prin evocarea unei proprietăți (de exemplu „locuitor al Bucureștiului"). „Definiția prin enumerare se numește «extensivă», iar aceea care amintește o proprietate «comprehensivă»"[3]. Ultima, spune Russell este fundamentală din două considerente: „1) Definiția extensivă poate totdeauna să fie transformată într-una comprehensivă, 2) definiția comprehensivă nu poate, nici măcar teoretic, să fie redusă la una extensivă"[4]. Astfel, grupul definit mai sus în mod extensiv poate fi definit comprehensiv prin „*X* este sau Ion, sau Gheorghe, sau Vasile". Definițiile extensive pot să nu fie *necesare*, iar în cazul cînd avem de-a face cu mulțimi infinite ele sînt chiar imposibile, astfel că nu ne mai putem sprijini decît pe definițiile comprehensive. Din cele de mai sus, Russell reține trei idei importante pentru cercetarea definiției numărului: a) numerele înseși formează o mulțime infinită și, prin urmare, nu pot fi definite extensiv, b) nu este exclus ca mulțimile care au un *număr dat* de elemente să se dovedească (ulterior) a fi infinite, c) trebuie să definim numerele în așa fel ca infinitatea lor să fie posibilă. O clasă are o singură caracteristică numerică

---

[1] Bertrand Russell, *Op. cit.*, p. 24.
[2] Ibidem, p. 24.
[3] Ibidem.
[4] Ibidem.

şi un număr mare de alte diferite caracteristici. Ce înseamnă a concepe numărul unei clase? „...A concepe numărul unei clase este un mod de a grupa anumite mulţimi, adică pe acelea care au un număr de termeni dat. Putem presupune toate cuplurile (diadele. — *G. E.*) la un loc, toate triadele etc."[1]. „Fiecare grup este o clasă ai cărui membri sînt mulţimi, adică clase; de asemenea fiecare este o clasă de clase"[2]. De exemplu, din clasa diadelor vor face parte: clasa mîinilor unui om, clasa picioarelor unui om, clasa aripilor unei păsări etc., fiecare dintre aceste clase constînd exact din doi membri. Numărul unei clase nu poate fi definit prin numărătoare, deoarece numărătoarea presupune la rîndul ei numărul şi în acest fel definiţia ar fi un cerc vicios. Trebuie, conchide Russell, să găsim altă metodă. Această metodă constă în stabilirea corespondenţei biunivoce între clase (operaţie care nu presupune că ştim să numărăm).

Două clase X şi Y se află în corespondenţă biunivocă dacă fiecărui membru x al clasei X îi punem în corespondenţă un şi numai un membru y al clasei Y şi, invers, dacă fiecărui membru y al clasei Y îi punem în corespondenţă un şi numai un membru x al clasei X. De exemplu, clasa mîinilor poate fi pusă în corespondenţă biunivocă cu clasa picioarelor, astfel ca mîna dreaptă să corespundă cu piciorul drept şi mîna stîngă cu piciorul stîng. Două clase aflate în raport de corespondenţă biunivocă se numesc *echipolente*. Dacă vom nota clasele cu α, β, γ, ..., iar relaţia de echipolenţă cu $\sim$, atunci expresia de forma „$\alpha \sim \beta$" va însemna *„clasa α este echipolentă cu clasa β"*.

Astfel, următoarele clase de numere sînt echipolente:

$$(\alpha) \quad \{1, \ 2, \ 3, \ 4, \ \ldots, \ n, \ \ldots,\}$$
$$(\beta) \quad \{2, \ 4, \ 6, \ 8, \ \ldots, \ 2n, \ \ldots\}$$

O clasă fără nici un element poartă numele de *clasă vidă*. Astfel „clasa oamenilor cu aripi" este o clasă vidă, întrucît nici un om nu are aripi. Vom nota clasa vidă cu simbolul Λ. Cunoştinţele de mai sus sînt suficiente pentru a construi definiţia *numărului cardinal. Numărul cardinal al unei clase α este clasa*

[1] Ibidem, p. 26.
[2] Ibidem.

tuturor claselor echipolente cu α. Din această definiţie decurge că toate clasele care se află între ele în raport de echipolenţă au *acelaşi număr* (de obiecte). Pe baza definiţiei de mai sus se introduc apoi toate numerele şirului natural.

Zero (0) este clasa tuturor claselor echipolente cu clasa vidă (Λ); altfel spus, zero este numărul cardinal al clasei vide.

Unu (1) este clasa tuturor claselor echipolente cu clasa {0}, adică echipolente cu clasa care are ca unic element pe zero.

Doi (2) este clasa tuturor claselor echipolente cu clasa {0, 1}, adică echipolente cu clasa care este formată din elementele 0 şi 1. Într-un mod asemănător se definesc toate celelalte numere naturale. Schema generală a unei asemenea definiţii este următoarea: un număr *n* este clasa tuturor claselor echipolente cu clasa formată din {0, ..., *n* — 1}, adică din numerele naturale de la zero la *n* — 1. Pe baza numărului cardinal se defineşte şi *ideea de număr natural* în genere. Numărul natural (sau numărul cardinal finit) este numărul cardinal pentru care are loc inducţia matematică.

Conform cu definiţiile de mai sus, numărul *unei* diade va fi clasa tuturor diadelor. „În fapt, clasa tuturor cuplurilor (diadelor. — *G. E.*) va fi numărul *2* după definiţia noastră. Graţie utilizării unei mici bizarerii, această definiţie oferă ceva determinat şi indubitabil; nu este dificil să verificăm că numerele astfel definite sînt înzestrate cu toate proprietăţile pe care noi ne aşteptăm să le găsim la numere“[1]. Am văzut că aritmetica fusese redusă de Peano la trei noţiuni primitive (nedefinite) — număr natural, zero şi succesor —, precum şi la cinci axiome. Pentru ca reductibilitatea la logică să fie completă, era necesar să se definească în termeni logici şi noţiunea de „succesor“. „*Succesorul numărului de termeni ai clasei* α *este numărul de termeni ai clasei formate prin adăugarea termenului x la* α, *prevăzut fiind că x nu este un termen al clasei primitive*“[2]. După cîte se observă, şi aici noţiunea de *număr* este fundamentală.

---

[1] B. Russell. *Op. cit.*, p. 31.
[2] Ibidem, p. 37.

Definiţia numărului dată pînă aici se bazează pe teoria claselor (sau teoria mulţimilor). O „logicizare" este posibilă şi pe baza calculului predicatelor. Vom apela în acest sens la lucrarea lui Hilbert şi Ackermann *Bazele logicii teoretice*. După cum scriu aceşti autori, „numerele apar ca însuşiri ale predicatelor, şi pentru calculul nostru un număr determinat reprezintă un predicat de predicate... Ca urmare a acestui fapt, devine posibil să includem în logică teoria numerelor". Iată definiţiile numerelor 0, 1 şi 2:

$0(F) = df\,\overline{\exists x Fx}$ („nu există x pentru care să aibă loc proprietatea F");

$1(F) = df\,\exists x[Fx \,\&\, \forall y(Fy \rightarrow (x \equiv y))]$ („există x pentru care are loc Fx şi orice y care satisface pe Fy este identic cu acest x");

$$2(F) = df\,\exists x \exists y \{(x \not\equiv y) \,\&\, Fx \,\&\, Fy \,\&\, \forall z[Fz \rightarrow ((x \equiv z) \vee \vee (y \equiv z))]\}.$$

Hilbert şi Ackermann numesc aceasta „tratarea logică a noţiunii de cantitate". În acest fel, ei înşişi aderă în fapt la punctul de vedere logicist. O dată cu definiţiile de mai sus, punctul numărul 1 din programul lui Frege pare să fi fost îndeplinit.

Prezentarea modului în care s-a realizat punctul doi din programul (transcrierea propoziţiilor aritmetice în termeni logici) nu prezintă un interes deosebit, de aceea vom da un simplu exemplu (cu titlu informativ), transcrierea expresiei

„1 + 1 = 2":

$\forall x \forall y\ [((x \in 1) \,\&\, (y \in 1)) \equiv ((x \cup y) \in 2)]$ (unde $x \neq y$ şi sînt nevide)

(în teoria claselor);

$$\forall F \forall G\ \{[Inc\ (F, G) \,\&\, 1(F) \,\&\, 1(G)] \rightarrow 2(F \vee G)\}$$

(unde „Inc" este predicatul „incompatibil")

(în teoria predicatelor).

În *Principia Mathematica* s-a efectuat deducţia propoziţiilor aritmetice, în primul rînd a axiomelor lui Peano. Iată ce scrie Russell în concluzie: „Admiţînd că numărul de indivizi din univers nu este finit, noi am reuşit nu numai să definim cele

trei idei primitive ale lui Peano, dar chiar să demonstrăm cele cinci propoziţii primitive cu ajutorul ideilor primitive şi ale propoziţiilor care aparţin logicii. Rezultă că întreaga matematică pură, întrucît poate să fie dedusă din teoria numerelor naturale, nu este decît o extindere a logicii"[1]. Iată deci punctul de vedere *logicist*, afirmat cu toată claritatea. Acest punct de vedere a fost împărtăşit, printre alţii, de A. Church, W.O. Quine, Wang Hao ş.a. Hilbert, Tarski preiau pur şi simplu teza logicistă, fără a se declara în genere în favoarea curentului logicist. Cu alte cuvinte, ei nu încearcă să dezvolte această concepţie. Cel care a încercat *să relanseze* logicismul a fost Quine în lucrarea sa *Mathematical Logic*. Quine încearcă să evite dificultăţile legate de teoria tipurilor prin introducerea principiului „stratificării" (principiu nelogic, care poate fi considerat ca pragmatic). În lucrarea sa *Introducere în logică şi metodologia ştiinţelor*, A. Tarski recunoaşte că „noţiunea numărului însuşi şi în acelaşi mod toate celelalte noţiuni aritmetice se pot defini fără a ieşi din limitele logicii". La simpozionul organizat de redacţia revistei „Erkentnis" (septembrie, 1930) la Königsberg (oraşul în care a trăit şi a activat I. Kant), Rudolf Carnap a prezentat şi a susţinut punctul de vedere logicist. El a pornit însă pe alte căi decît Russell. Împreună cu Tarski, Carnap este creatorul *semanticii logice*. Acum cîţiva ani, Alonzo Church a încercat un fel de relansare atenuată a tezei logiciste în comunicarea *Mathematics and logic*, prezentată la Congresul de logică, metodologie şi filozofie a ştiinţei de la Stanford din 1960. A. Church înglobează teza logicistă în afirmaţia mai generală că „logica are prioritate faţă de matematică". Această afirmaţie, arată Church, are două sensuri: a) *sensul tare*, „matematica poate fi pe deplin obţinută din logica pură fără introducerea unor noţiuni de bază suplimentare sau a unor presupuneri suplimentare"[2], şi *sensul atenuat*, „logica este în orice caz o premisă necesară pentru matematică, întrucît raţionamentul deductiv

---

[1] Ibidem, p. 38.

[2] A. Church. *Mathematics and Logic*, în *Logic, Methodology and Phylosophy of Science*, Stanford Univ. Press, 1962, p. 181; vezi şi traducerea în limba română în volumul *Logică şi filozofie*, Bucureşti, Editura politică, 1966, p. 405—414.

joacă în matematică un rol atît de important"[1]. Church înşiră obiecţiile şi încearcă să aducă argumente în favoarea tezei atenuate a „priorităţii logicii". Asupra acestora vom reveni într-un paragraf următor. Cu aceasta încheiem § 1, cu răspunsul: *nu, numărul nu este un atom democritic*. Numărul nu este o abstracţie ireductibilă, *nu este o entitate absolută*.

2. MATEMATICA ESTE O RAMURĂ A LOGICII?

Problema aceasta este o problemă specială, care ţine de competenţa *logicii aplicate*; tocmai de aceea, înainte de a încerca s-o abordăm din punct de vedere filozofic, vom vedea ce argumente concrete se pot aduce împotriva construcţiilor „logiciste", considerate din punctul de vedere al *tezei logiciste*. Sîntem întru totul de acord cu următoarea idee exprimată de Körner cu privire la modul în care trebuie judecate sistemele „logiciste": „Dacă sistemul este deficient *qua matematica*, confruntarea lui cu tezele şi programele filozofice poate fi uneori fără valoare. Dar numai perfecţiunea matematică a sistemului lui nu este suficientă pentru a face validă o filozofie logicistă a matematicii"[2]. O analiză cît de cît atentă a principalei construcţii „logiciste" *Principia Mathematica* ne arată că autorii ei (Russell în primul rînd) adoptă următoarele supoziţii tacite (sau nu îndeajuns de explicite):

a) categoria „clasă" şi relaţia de „apartenenţă" ţin de domeniul logicii;

b) teoria logică a claselor este identică cu teoria matematică a mulţimilor;

c) orice propoziţie a matematicii aritmetizate (după cum s-a mai arătat, nu vom include aici geometria) se poate deduce în sistemul *Principia Mathematica* sau într-o construcţie asemănătoare perfecţionată. Dificultăţile se ivesc atunci cînd păşim

---

[1] Ibidem, p. 183.
[2] S. Körner. *Introducere în filozofia matematicii*, Bucureşti, Editura ştiinţifică, 1965, p. 66.

în domeniul mulţimilor transfinite. Spre o mai mare eficienţă a comparaţiei, vom pune în faţă două construcţii efective: *Principia Mathematica* şi sistemul axiomatizat al teoriei mulţimilor *ZF* (Zermelo-Fraenkel). Acest sistem foloseşte o serie de definiţii şi nouă axiome. Un deosebit interes prezintă axioma alegerii şi axioma infinitului. Formularea *axiomei alegerii* este următoarea. Pentru orice mulţime formată din mulţimi (nevide) care se exclud reciproc există cel puţin o mulţime care are un membru comun cu fiecare dintre mulţimile date. *Axioma infinitului*. Dacă *n* este un număr cardinal inductiv oarecare, există cel puţin o clasă de indivizi avînd *n* termeni (formularea lui Russell).

Deşi aceste axiome sînt exprimabile în termeni „logici", *axioma alegerii* şi *axioma infinitului* s-au dovedit a nu fi deductibile din axiome logice. Pe de altă parte, neavînd caracter logic (nu sînt *tautologii* sau *propoziţii analitice)*, ci mai degrabă unul empiric, ele nici nu pot fi anexate pur şi simplu la axiomele logicii. Iată ce scria A. Church în 1960 despre acest lucru: „Într-adevăr, axioma infinitului poate fi socotită semilogică prin caracterul său, deoarece ea poate fi formulată în dicţionarul folosit pentru formularea legilor logicii pure, dar nu este analitică în raport cu vreo teorie cunoscută a raţionamentului deductiv, care poate, după părerea mea, să reprezinte în mod adecvat şi firesc o practică standard existentă a raţionamentului matematic"[1]. Dar o dată cu „izgonirea" lor din logică rămîn pe dinafară şi toate teoremele a căror demonstraţie se sprijină pe aceste axiome. S-a constatat în schimb altceva, anume că se pot deduce implicaţiile de forma Ax→T adică implicaţiile care au ca *antecedent* una dintre cele două axiome, iar drept consecvent o consecinţă (teoremă) care decurge din ele. Se deduce de aici că în orice caz ele trebuie acceptate ca axiome, ceea ce, după expresia lui Fraenkel, autorii sistemului *Principia Mathematica* nu erau „prea bucuroşi" să facă, avînd în vedere caracterul nelogic (neanalitic, netautologic) al acestor

---

[1] A. Church. *Op. cit.*, p. 184–185.

axiome. Carnap a încercat să evite dificultăţile legate de axioma infinitului prin construirea aşa-numitelor „limbaje coordonate", în care obiectele nu sînt *numite* (ca în limbajele nominale), ci sînt reprezentate prin coordonatele lor în sistem (exemplu poziţia spaţio-temporală). În loc să scriem „obiectul *a* este Albastru" vom scrie: Albastru (X_1, X_2, X_3, X_4) ceea ce înseamnă că poziţia cu coordonatele X_1, X_2, X_3, X_4 este albastră. Axioma infinitului ar fi reprezentată în sistem de o *teoremă* (deci se deduce), care afirmă că „nu există ultimul element în succesiune".

Carnap şi alţi logicieni (de exemplu logicianul sovietic D.A. Bocivar) cer excluderea din logică a oricărei presupuneri existenţiale, cu alte cuvinte „logica este liberă de ontologie" (contrar binecunoscutei poziţii a lui Aristotel). După cum arată Fraenkel, inovaţia lui Carnap n-a prea fost luată în consideraţie de specialişti şi nu se poate face o apreciere calificată asupra ei, mai ales că ea n-a fost probată în vreo construcţie.

O lovitură a primit logicismul şi din partea renumitei teoreme al lui Gödel despre incompletitudinea de principiu a sistemelor de tipul *Principia Mathematica*. Această teoremă arată că există propoziţii aritmetice adevărate care nu pot fi deduse în sistem, deşi pot fi demonstrate cu mijloace din afara sistemului. În acest fel se dovedeşte că nu toată aritmetica poate fi înglobată într-un sistem de tip „logicist".

Am enumerat pînă acum două obiecţii. „Conform cu cea de-a treia obiecţie — scrie A. Church — pentru matematică este necesară nu logica în sensul teoriei raţionamentului deductiv, ci doar numai anumite cazuri concrete de raţionament deductiv"[1]. Această obiecţie este adusă mai ales de reprezentanţii intuiţionismului matematic. În concepţia intuiţioniştilor, trebuie să conchidem că „programul logicist este... pur şi simplu imposibil"[2].

În orice caz, obiecţiile de mai sus arată *eşecul construcţiilor logiciste pe linia încercării reducerii (deductive) a matematicii la logică, cu alte cuvinte eşecul practic al programului lui*

---

[1] Ibidem, p. 185.
[2] Ibidem.

Frege. Nu există pînă în momentul de față nici un argument *constructiv* care să susțină teza logicistă*. Dar este aceasta o dovadă definitivă împotriva tezei logiciste?

3. O OMISIUNE FUNDAMENTALĂ

S-a petrecut ceva asemănător cu „oul lui Columb", s-a uitat un lucru foarte simplu: înainte de a reduce „matematica" la „logică", ar trebui să știm ce înseamnă „matematică", dar mai ales ce înseamnă „logică"! Cu alte cuvinte, *este necesar să știm ce trebuie să reducem la ce*. Cîtă vreme nu am soluționat această problemă — soluție care nu este de loc ușor de obținut —, toată discuția cu privire la „reducere" atîrnă în vid. *Ne-am propus să reducem mulțimea* M *a propozițiilor matematice la mulțimea* L *a propozițiilor logice, dar nu știm încă să delimităm exact în ce constă proprietatea „logic" prin care se definește această ultimă mulțime*. Nu este prima dată în istoria cunoașterii cînd ne aflăm într-o asemenea situație curioasă, cînd oamenii „irosesc" timpul cu lucruri complicate pentru a se trezi apoi că au omis cîteva chestiuni simple, de principiu. „În legătură cu majoritatea termenilor care intră în formularea dată a tezei logiciste, nu există nici un fel de convenție general acceptată; aceasta se referă în particular la termeni ca «logică», «axiome logice», «regulă de deducție» și «dicționar logic». În funcție de interpretările concrete ale acestor termeni, ca și în funcție de precizarea termenului «matematică» (de exemplu se consideră sau nu că geometria intră în matematică și, dacă da, ce se înțelege prin «geometrie»), teza logicistă cuprinde o gamă extrem de largă: de la truisme care nu prezintă nici un interes pînă la speranțe respectabile, dar neclare în fun-

---

* Ar trebui să mai spunem că între logicismul lui Frege și cel al lui Russell există o deosebire, care-și are originea în concepția despre definiții. Russell credea că definițiile sînt simple abrevieri, definiții nominale. Frege, dimpotrivă, nu reducea definițiile la cele nominale. În particular, definiția numărului este pentru Russell o definiție nominală, iar pentru Frege o definiție reală. Vom distinge deci între logicismul „realist" al lui Frege și logicismul „nominalist" al lui Russell.

damentul lor, și afirmații aproape evident false"[1]. Discuția în legătură cu *caracteristica* mulțimii propozițiilor logicii s-a concentrat în jurul așa-numitului caracter *analitic* al propozițiilor logicii. Ne-am întîlnit cu această problemă la Leibniz, care distingea între „adevărurile rațiunii" și „adevărurile de fapt"; ea apărea însă și la alți gînditori, de exemplu la Descartes (înainte de Leibniz) și la Kant (după Leibniz). Astfel, Descartes împarte relațiile (sau conjuncțiile) în „necesare" și „contingente", *necesar* fiind ceea ce este „intim implicat în conceptul celuilalt", iar *contingent* ceea ce nu este legat „printr-o relație inseparabilă". Kant vorbea despre legături *analitice* și *sintetice* între subiect și predicat. *Analitic*: „predicatul *B* aparține subiectului *A* în așa fel că el este conținut (în mod intim) în acest concept *A*"; *sintetic*: „*B* se află cu totul în afara lui *A*, dar el se află într-adevăr în relație cu aceasta". Deși definiția *necesarului*, dată de Descartes, corespunde cu definiția *analiticului*, dată de Kant, ei dau aplicații diferite acestor concepte. Astfel, propoziția aritmetică $7 + 5 = 12$ este pentru Kant *sintetică*, în timp ce pentru Descartes este *necesară* (analitică). Kant însă subordonează propozițiile logicii și matematicii unei însușiri comune, care îl apropie de concepția lui Leibniz, anume aceea de a fi propoziții *apriori* (adevărate înainte și independent de experiență).

„Frege înlocuiește noțiunea leibniziană de propoziție identică — una în care incluziunea subiectului în predicat este evidentă sau poate fi făcută evidentă într-un număr finit de pași — prin propria sa noțiune de propoziție *analitică*: o propoziție este *analitică* dacă se poate arăta că ea decurge pur și simplu din legi generale de logică, plus definiții formulate în conformitate cu aceste legi. Frege înlocuiește de asemenea reducția leibniziană la propoziții identice prin procedura sa proprie *de a demonstra* că o propoziție analitică este analitică. Aceasta o face enumerînd cu toată claritatea posibilă nu numai toate legile logice fundamentale admisibile ca premise, ci și toate metodele de inferență pe care avem dreptul să le folosim"[2].

---

[1] A. A. Fraenkel și Y. Bar-Hillel. *Op. cit.*, p. 201.
[2] S. Körner, *Op. cit.*, p. 45–46.

Se observă însă că Frege se îndepărtează şi mai mult de explicaţia necesară, căci el pune în dependenţă ideea de *analitic* de ideea de *lege logică*, cînd de fapt ceea ce trebuie explicat în ultimă instanţă este tocmai termenul „logic".

Ludwig Wittgenstein, în al său *Tractatus logico-philosophicus*[1], încearcă o relansare a ideii de analitic prin legarea ei de ideea de tautologie*. Wittgenstein scrie: „6.1. Propoziţiile logicii sînt tautologii". „11. Propoziţiile logicii, prin urmare, nu spun nimic (ele sînt propoziţii analitice)"**.

În speranţa salvării logicismului, B. Russell reia această idee a lui Wittgenstein, pentru ca, exact pe aceeaşi pagină, să termine *în fapt* prin a renunţa la ea. De altfel, întreaga viaţă a lui Bertrand Russell dovedeşte de minune adevărul proverbului englezesc „A wise man changes his mind, a fool never does" (Înţeleptul îşi schimbă gîndul, nebunul niciodată). Iată ce scrie Russell: „Este clar că definiţia «logicii» sau a «matematicii» trebuie să fie cercetată, încercînd să dăm o nouă definiţie

---

[1] L. Wittgenstein. *Tractatus logico-philosophicus*, Londra, 1955.

* De altfel, Wittgenstein aderă el însuşi la concepţia logicistă. Logicismul lui Wittgenstein nu este însă identic cu logicismul lui Russell. Iată aforismele corespunzătoare:

„6.2. Matematica este metodă logică. Propoziţiile matematicii sînt egalităţi şi deci pseudopropoziţii".

„6.211. În viaţă doar nu există astfel de propoziţii matematice în care ne-am putea pune speranţa, ci propoziţiile matematicii le folosim *numai* pentru ca din propoziţii, care nu aparţin matematicii, să deducem altele care de asemenea nu aparţin matematicii".

„6.2341. Esenţa metodei matematice: a lucra cu egalităţi".

„6.24. Metoda cu ajutorul căreia matematica ajunge la egalităţile sale este metoda substituţiei".

Cu alte cuvinte, pentru Wittgenstein matematica este o *metodă de a deduce* unele propoziţii din altele (deci o metodă logică). Logicismul lui Wittgenstein este în acest fel un logicism *metodologic*, spre deosebire de logicismul lui Russell, care este pur *logic* (propoziţiile matematicii *se deduc* din propoziţiile logicii). Dar Russell şi Wittgenstein sînt de acord că propoziţiile celor două ştiinţe nu au nici un conţinut. Fiind vorba de propoziţii vide de conţinut, Russell nu trage din reducţia logică nici o concluzie ontologică cu privire la matematică şi la logică. Dimpotrivă, Frege conchide din reducţia propoziţiilor matematicii la propoziţiile logicii că *obiectele matematice* (existente independent de propoziţii şi pe care propoziţiile doar le recunosc) se reduc la *obiecte logice*. Prin urmare, trei tipuri de logicism (pe lîngă alte variante): a) ontologic (Frege), b) logic (Russell), şi c) metodologic (Wittgenstein).

** Referindu-se la principiul noncontradicţiei, Hegel scria că „acest principiu în expresia lui pozitivă $A = A$ nu este mai întîi nimic altceva decît expresia unei *tautologii* goale. De aceea, s-a observat just că această lege a gîndirii este fără conţinut şi nu duce mai departe" (G. W. F. Hegel, *Ştiinţa logicii*, Bucureşti, Editura Academiei, 1965, p. 398).

vechii noţiuni de propoziţie «analitică ». Deşi nu ne mai putem mulţumi să definim propoziţiile logice ca rezultate ale legii noncontradicţiei, noi putem şi trebuie să admitem că ele formează o clasă în întregime diferită de aceea a propoziţiilor la care ajungem prin empirism. Ele au toate caracteristica pe care noi tocmai am convenit s-o numim *tautologie*. Aceasta, combinată cu faptul că ele pot să fie exprimate cu ajutorul variabilelor şi constantelor logice, va furniza definiţia logicii sau a matematicii pure (reamintim că o constantă logică este ceva care rămîne constant într-o propoziţie chiar cînd *toate* componentele ei sînt schimbate). Pentru un moment eu nu ştiu de loc (sic!) cum trebuie să definim «tautologia». S-ar putea uşor oferi o definiţie care să pară satisfăcătoare pentru un timp, dar eu n-am formulat nici una care să mă satisfacă complet, deşi simt net caracteristica pe care trebuie s-o posede această definiţie"[1]. Urmează imediat un fel de repliere: „Deci, ajunşi la acest punct, noi atingem limita actuală a cunoştinţelor noastre după ce am urcat pînă la bazele logice ale matematicii"[2].

De problema analiticităţii în matematică a fost preocupat şi Poincaré. În cartea sa *Ştiinţa şi ipoteza*, H. Poincaré, discutînd despre natura raţionamentului matematic, îşi punea întrebarea dacă nu cumva întreaga matematică nu este o „imensă tautologie", adică „moduri mai complicate de a spune *A* este *A*". Dacă axiomele matematice la care se reduce totul nu depind de „fapte experimentale", avem un motiv să le clasificăm printre judecăţile sintetice apriori (vezi Kant). Dar, constată Poincaré, „aceasta nu înseamnă a rezolva dificultatea, ci doar *a o boteza* (subl. n. — *Gh. E.*)[3].

„Dacă toată ştiinţa numărului ar fi analitică sau ar rezulta analitic dintr-un mic număr de judecăţi sintetice, s-ar părea că un spirit destul de puternic ar putea dintr-o singură privire să-i surprindă toate adevărurile"[4]. Dacă lucrurile nu stau astfel, atunci trebuie să existe un raţionament matematic deosebit

---

[1] Ibidem, p. 243.
[2] Ibidem.
[3] H. Poincaré. *La science et l'hypothèse*, Paris, ed. Flammarion, p. 10 (subl. ns.).
[4] Ibidem, p. 11.

de silogism (silogism care nu aduce nimic nou în concluzie), raţionament cu „virtute creatoare". Silogismul obişnuit (aristotelic), fiind pur analitic, nu este apt decît să dea *verificări* nu şi *demonstraţii*. „*Verificarea* diferă exact faţă de demonstraţie, pentru că ea este pur analitică şi pentru că ea e sterilă. Ea este sterilă deoarece concluzia nu este decît traducerea premiselor în alt limbaj. Demonstraţia, dimpotrivă, este fecundă, deoarece concluzia este luată într-un sens mai general decît premisele"[1]. Cînd Leibniz pretinde să demonstreze că $2+2 = 4$, el nu face decît să verifice. În consecinţă, dacă matematica nu este o imensă tautologie (şi Poincaré nu crede că ea este astfel), ea trebuie să dispună de un instrument mai fecund decît *raţionamentul analitic* (silogismul). „Acest procedeu este demonstraţia prin recurenţă. Se stabileşte mai întîi o teoremă pentru $n = 1$; se arată apoi că, dacă este adevărată pentru $n-1$, este adevărată şi pentru n şi deci pentru toate numerele întregi"[2] (cu alte cuvinte, raţionamentul prin inducţia matematică). Raţionamentul prin recurenţă reprezintă, după părerea lui Poincaré, o infinitate de silogisme ipotetice.

Teorema este adevărată despre numărul *1*. Or, dacă este adevărată despre *1*, este şi despre *2*. Deci este adevărată despre *2*. Or, dacă este adevărată despre *2*, este şi despre *3*. Deci este adevărată despre *3* etc.

Premisele majore ale acestui silogism se reduc toate la o formulă unică: „Dacă teorema este adevărată despre $n-1$, atunci ea este adevărată şi despre n"[3]. Raţionamentul prin recurenţă este „instrumentul care ne permite să trecem de la finit la infinit"[4]; el este „ireductibil la principiul noncontradicţiei". „Această regulă, inaccesibilă demonstraţiei analitice şi experienţei, este tipul veritabil de judecată sintetică apriori"[5]. Pentru Poincaré, ea însemna totodată „o proprietate a spiritului nostru" şi nu ceva ce se întemeiază pe vreo ordine exterioară. În ridicarea lor de la particular la general, mate-

---

[1] Ibidem, p. 13.
[2] Ibidem, p. 19.
[3] Ibidem, p. 20.
[4] Ibidem, p. 22.
[5] Ibidem, p. 23.

maticienii se sprijină pe inducția matematică (raționamentul recurent). Această ridicare treptată spre general este ea însăși un „mers pur analitic", diferit însă de cel din silogismul aristotelic, este un mers prin complicare. „Matematicienii deci procedează «prin construcție», ei construiesc combinații din ce în ce mai complicate. Revenind apoi prin analiza acestor combinații, a acestor mulțimi (de elemente), ca să spunem așa, la elementele lor primitive, ei observă raporturile acestor elemente și deduc raporturile dintre mulțimile înseși"[1].

Iată pe scurt concepția lui Poincaré despre raționamentul matematic, despre caracterul analitic al acestui raționament, analiticitate deosebită de aceea a silogismului aristotelic. Dacă în silogismul aristotelic concluzia decurge din analiza premiselor, în raționamentul matematic ea decurge din analiza mulțimii de elemente. Raționamentul matematic este constructiv și creator, cel silogistic este steril și slujește doar verificării.

Poincaré ne îndeamnă să spunem că trebuie să distingem o *analiticitate* silogistică și *una inductivă*. Ni se pare că această afirmație rezumă fidel cele spuse mai sus. Raționamentul matematic este el însuși analitic, însă regula pe care se sprijină este *sintetică apriori*, ireductibilă la regulile logicii formale. În acest fel, Poincaré relativizează ideea de analitic, procedînd în ultimă instanță nu numai la separarea netă a matematicii de logică (contrar logicismului), dar, mai mult chiar, la separarea instrumentului logic al matematicii de instrumentul logic (aristotelic). *Matematica are deci propriul ei principiu logic*. Cum logicismul n-a luat în considerație posibilitatea relativizării noțiunii de analitic, a face din *analitic* un criteriu de deosebire a propozițiilor logice devine extrem de discutabil. Pe scurt, Poincaré complică existența unei concepții logiciste.

În lucrarea sa *Semnificație și necesitate* (ultimul tom din opera *Introducere în semantică)*, Rudolf Carnap reia conceptul de „adevăr necesar" (Leibniz) sau „adevăr analitic" (Kant), ori „adevăr logic" (formal), pe care-l precizează cu ajutorul concep-

---

[1] Ibidem, p. 26.

tului de *L-Adevăr*, L-Adevăr fiind în acest fel un *explicant* pentru acest concept.

Carnap consideră că orice explicant al conceptului de *adevăr analitic* trebuie să satisfacă următoarea convenţie: „Propoziţia S_i este *L*-adevărată în sistemul semantic *S* dacă şi numai dacă S_i este adevărată în *S*, în aşa fel că adevărul ei poate fi stabilit numai pe baza regulilor semantice ale sistemului *S* fără vreun apel la fapte (extralingvistice)“[1]. Aceasta însă nu este încă definiţia noţiunii *L-Adevăr*. Ca şi Tarski, Carnap consideră că noţiunea de adevăr se defineşte în funcţie de sistemul semantic considerat. „Procedeul de definire al acestui concept ne este sugerat de concepţia lui Leibniz conform cu care adevărul necesar trebuie să se îndeplinească în toate lumile posibile“[2]. Carnap pretinde să dea un echivalent noţiunii leibniziene de „lume posibilă“ în noţiunea sa de „descriere de situaţie“ *(state description)*. Definiţia pe care o dă el se referă la sistemul semantic S_1, care constă din constante descriptive, variabile individuale, conectorii „nu“, „sau“, „şi“, „implică“, „echivalent“, cuantorii universal, existenţial şi operatorii descripţiei şi abstracţiei. *Descrierea de situaţie* este „clasa tuturor propoziţiilor în S_1, care conţine pentru fiecare propoziţie atomară (adică propoziţie de forma „*Pa*“, unde *a* este o constantă care desemnează un individ, iar *P* este o constantă pentru un predicat) sau această propoziţie, sau negaţia ei, dar nu ambele deodată, şi nu conţine nici un fel de altă propoziţie“[3]. De aici Carnap trece la definirea *L*-adevărului: „2—2. *Definiţie*. Propoziţia S_i este *L-adevărată* (în S_1) $= df$ S_i are loc în toate descrierile de situaţii (în S_1)“[4]. Acest concept *L-adevăr* redă exact conţinutul noţiunii de adevăr analitic (logic, necesar). Totuşi, Carnap, urmîndu-l pe Quine, nu identifică *analiticitatea* cu *adevărul analitic* (logic).

Considerînd următoarele două propoziţii:

1. „Fido este negru sau nu este negru“.

---

[1] R. Carnap. *Semnificaţie şi necesitate*, trad. rusă, Moscova, 1959, p. 40.
[2] Ibidem, p. 41.
[3] Ibidem, p. 38.
[4] Ibidem, p. 41.

2. „Dacă Jack este celibatar, atunci el nu este căsătorit", Carnap este de acord cu Quine că ambele sînt propoziții *analitice*, dar numai prima este *logic adevărată*. În acest fel, clasa propozițiilor *analitice* este mai largă decît clasa propozițiilor *logic adevărate*. Totodată, din cele de mai sus *nu rezultă că propozițiile logicii sînt tot una cu propozițiile analitice sau cu propozițiile logic adevărate*. Concepția lui Quine și Carnap aduc încă o complicație în existența logicismului: *este logicul un caz particular al analiticului sau analiticul un caz particular al logicului, sau analiticul și logicul au același conținut?* După părerea noastră, nici Carnap nu dă răspuns la această întrebare. În 1958, Kazimierz Ajdukiewicz a publicat în „Studia logica" (VIII) un studiu care, din punctul de vedere al ideii cercetate, ne atrage atenția: *Problema fundamentului propozițiilor analitice*. Ajdukiewicz consfințește și precizează diviziunea analiticului, pe care au operat-o Poincaré, Quine, Carnap. Toate dificultățile în definirea analiticului, spune Ajdukiewicz, provin de acolo că s-a căutat o „noțiune absolută", cînd de fapt ea trebuie înțeleasă într-un mod relativ.

„Nici o propoziție nu este pur și simplu analitică sau nu, după cum nici un om nu poate să fie pur și simplu amic sau tată sau fiu, deși el poate să fie una sau alta prin raport cu cineva"[1]. Relativizarea acestei noțiuni trebuie înțeleasă „prin raport cu anumite convenții terminologice", iar „convențiile terminologice pot să fie de ordin semantic sau sintactic"[2]. O convenție terminologică este o declarație asupra modului în care ne decidem să folosim anumiți termeni. Astfel, următoarea declarație: „Eu mă decid să folosesc cuvîntul «centimetru» ca un nume pentru lungimea egală cu a suta parte dintr-un metru" este o convenție semantică (ea se referă la raportul dintre un cuvînt, „centimetru", și obiectul pe care-l desemnează). Dimpotrivă, arată Ajdukiewicz, convenția: „Eu mă decid să folosesc cuvîntul «centimetru» în același sens ca și expresia

---

[1] Kaziemierz Ajdukiewicz. *Le problème du fondement des propositions analytiques* in *Studia logica* 1958, VIII, p. 259.
[2] Ibidem.

„a suta parte dintr-un metru»" este o convenţie sintactică (ea vizează raportul dintre două expresii).

În scopul de a defini noţiunea de propoziţie semantic-analitică, se introduce termenul auxiliar de *postulat*.

Df 1. *Propoziţia P este un postulat al limbii L dacă există o convenţie terminologică valabilă pentru limba L care prevede că un anumit termen λ conţinut în propoziţia P trebuie să desemneze un obiect care, în locul termenului λ, satisface propoziţia P.*

Df 2. *O propoziţie P a limbii L este analitică în sens semantic dacă ea este un postulat sau o consecinţă logică a unuia sau mai multor postulate ale acestei limbi.*

Pentru a defini noţiunea de propoziţie sintactic analitică, Ajdukiewicz se foloseşte de noţiunea auxiliară de *adevăr logic*.

Df 3. *O propoziţie P a limbii L este adevărată logic dacă P este o tautologie logică sau dacă rezultă dintr-o tautologie prin substituirea unei constante descriptive a aceleiaşi limbi în locul unei variabile.*

Exemple:

1) „Orice *A* care nu e *B* nu e *B*" (tautologie);

2) „Orice om care nu este căsătorit nu este căsătorit" (rezultatul substituţiei).

Df 4. *Propoziţia P este o propoziţie sintactic analitică dacă ea este un adevăr logic al acestei limbi sau poate fi redusă la un adevăr logic cu ajutorul convenţiilor terminologice de ordin sintactic valabile pentru această limbă.*

De exemplu, propoziţia: „Orice celibatar nu este căsătorit" este un adevăr logic, deoarece ea poate fi redusă cu ajutorul unei convenţii la un adevăr logic, anume la exemplul 2) de mai sus. Convenţia respectivă este aceea care arată că „celibatar" şi „om care nu este căsătorit" pot fi puse una în locul alteia.

Iată deci o concepţie destul de clară asupra noţiunii de analitic. Ea se raportează la noţiunea de logic prin definiţia 3), dar sîntem mai departe ca oricînd de a da explicantul noţiunii de *logic*. Conceptul de propoziţie logică este împins mereu în sfera nedefinitului. Aşadar, *în mod efectiv* nu s-a găsit un criteriu solid de analiticitate şi deci nu putem lua analiti-

citatea drept proprietate intrinsecă a propozițiilor logice. În concluzie, *nici teza logicistă nu se poate sprijini pe așa ceva*. Ar fi necesar să încheiem această expunere despre propozițiile analitice cu o prezentare a poziției materialismului dialectic. Din păcate, timp de mulți ani, această temă a fost neglijată, ca și cînd s-ar fi înțeles de la sine că ea nu prezintă nici o valoare. Ne vom asuma riscul unei explicații. Fără să intrăm în studiul exhaustiv al propozițiilor așa-zis *analitice*, vom aborda numai problemele a căror explicație aruncă o rază de lumină asupra chestiunii în discuție.

Să considerăm și noi o serie de exemple simple.

1) Omul este om.

2) În fiecare zi sau plouă sau nu plouă.

3) Dacă Gheorghe este *tată*, el are *copil*.

Fiecare dintre aceste propoziții este acceptată ca adevărată, ca un lucru „de la sine înțeles". Marea dificultate apare atunci cînd ne propunem să răspundem la întrebarea: ce înseamnă acest „de la sine înțeles". Omul obișnuit (neinstruit sub aspect filozofic) ar apela la intuiție (observație), ar face apel la repetiția cazurilor în experiență, ar spune că, în definitiv, *altfel* nu se poate. Logicianul ar spune că cele trei propoziții sînt adevărate „exclusiv în virtutea formei lor logice". Răspuns pretențios, dar care nu ne-ar duce cu un pas mai departe. De la început este de preferat să pornim pe căile cele mai obișnuite: să încercăm să refacem drumul prin care s-a ajuns la acest „de la sine înțeles". Pe stradă, în autobuz, acasă, la serviciu ne întîlnim zilnic cu o mulțime de cunoscuți, colegi, prieteni, rude etc. „L-am văzut *din nou* pe Vasile", „Mă întîlnesc zilnic cu Vasile", „Îl recunoști, el este Vasile", iată expresii care pot fi auzite la tot pasul. Ce vor să spună ele? Cînd afirm: „L-am văzut din nou pe Vasile", prin înțelesul său expresia „din nou" înseamnă că „este cel puțin a doua oară cînd îl văd". Trebuie deci să presupun că este adevărat că „ieri (sau cîndva în trecut) l-am văzut pe Vasile".

Mai mult, se presupune că Vasile pe care l-am văzut ieri este *același* cu Vasile pe care l-am văzut azi. „Același" înseamnă aci două lucruri: *Vasile de ieri* și *Vasile de azi* se află într-o

continuitate spaţio-temporală şi există o mulţime de proprietăţi care aparţin în exclusivitate lui *Vasile de ieri* şi *Vasile de azi*. Pe această bază putem afirma: „Vasile (de azi) este Vasile (de ieri) şi nu altcineva" sau, mai general, „Vasile este Vasile şi nu altcineva". În anumite contexte, această propoziţie poate să aibă şi o utilitate. Însă identitatea dintre Vasile şi Vasile apare cel mai adesea în formulări de acest gen „din nou Vasile", „tot Vasile", „chiar Vasile" etc.

Important este aici că noi *identificăm* pe Vasile cu Vasile pe baza unei *identităţi* reale relative. *Este posibil ca Vasile de ieri şi Vasile de azi să difere sub multe aspecte, însă noi facem abstracţie de aceste diferenţe în aşa fel, încît între Vasile de ieri şi Vasile de azi apare un fel de identitate totală*. Făcînd abstracţie de aceste diferenţe, ajungem uneori să operăm o identificare totală între Vasile de ieri şi cel de azi, ceea ce revine, în ultimă instanţă, la a spune că „Vasile este Vasile". Această identificare este ceea ce se numeşte în termeni moderni o *idealizare*. Cum se explică posibilitatea de a face abstracţie de diferenţe? *Explicaţia trebuie căutată în practică (căci gîndirea modelează practica). Practic, la un moment dat, nu avem nevoie de mai mult, practic putem neglija diferenţele care s-au ivit. Ei bine, tocmai această posibilitate de neglijare a anumitor trăsături noi ale obiectului în relaţiile practice stă la baza a ceea ce se numeşte „fac abstracţie de..."*. Pentru gîndirea noastră este o necesitate să facă abstracţie de datele care nu influenţează rezolvarea problemei. De exemplu, dacă vrem să măsurăm distanţa dintre Bucureşti şi Ploieşti, cele două oraşe pot fi tratate ca două puncte (fără dimensiuni), căci dimensiunile lor (suprafaţa) nu influenţează în nici un fel rezolvarea problemei puse.

Analog stau lucrurile şi în cazul judecăţilor de identitate, de forma *A este A*.

Anumite procedee logice ne permit să construim pe această bază un raţionament simplu: „Dacă are loc *A*, atunci are loc *A*", ceea ce poate fi schematizat astfel $p \vdash p$, unde „p" poate să însemne „are loc *A*". Putem de asemenea accepta şi o schemă mai abstractă, $p \rightarrow p$, unde „p" poate să însemne „o propo-

ziție adevărată". Într-un anumit fel, $p \vdash p$ este cel mai banal raționament, ca și judecata „*A* este *A*". *Sursa lor practică este incontestabilă*. *A* este *A*, $p \vdash p$, $p \to p$ sînt niște scheme care s-au format spontan în nemijlocită legătură cu practica; ele au fost doar *abstrase* și prezentate într-o formă ideală, dar nu inventate.

Tot atît de firească este și judecata: „În fiecare zi plouă sau nu plouă". Cu judecăți de acest fel ne întîlnim la tot pasul; ele au forma „*p* sau non-*p*". În ce privește judecata: „Dacă Gheorghe este tată, el are copil", ea este o urmare a afirmației că, „dacă cineva este tată, el are copil". Cu alte cuvinte, *prin definiție* „a fi tată" înseamnă „a avea copil". Putem considera și un alt caz de propoziție:

4. Dacă Socrate nu este om, el nu este filozof.

Adevărul acestei propoziții decurge din aceea că *numai oamenii pot fi filozofi*. Ce ne relevă cele patru propoziții analizate mai sus?

a) Fiecare dintre ele aparține unei mulțimi de propoziții de un caracter foarte trivial (propoziții cu care te întîlnești la tot pasul); astfel, propoziția 1) face parte din clasa propozițiilor de identitate; propoziția 2) face parte din clasa propozițiilor care se exclud; propoziția 3) face parte din clasa propozițiilor-definiții; și, în fine, propoziția 4) face parte din clasa pe care am s-o numesc de condiție *sine qua non*.

b) Constatarea de nenumărate ori a faptului că o propoziție de forma indicată este adevărată a dus la generalizarea: „Orice propoziție de forma respectivă este adevărată".

c) Este de ajuns să găsim *forma* anumitor propoziții pentru a putea decide dacă sînt adevărate sau nu.

Cu alte cuvinte, dacă o propoziție face parte din mulțimea propozițiilor cu forma cutare, ea este adevărată.

Reținem deocamdată constatarea importantă că aceste idei au la bază o practică foarte îndelungată; mai exact, această practică este întreaga practică social-istorică. Este cazul aici să amintim cuvintele lui Lenin: „*Activitatea practică a omului a trebuit să pună de miliarde de ori conștiința umană în situația de a repeta diferite figuri logice pentru ca ele să poată*

căpăta semnificația unor a x i o m e"[1]. Astfel de judecăți recunoscute ca adevărate exclusiv în virtutea formei lor pot fi numite „analitice". Vor fi numite „analitice" și propozițiile care redau aceste *forme*. De exemplu: „Pentru orice X, $X \equiv X$"; „Pentru orice X, $X \vee X$"; „Dacă $X = Y$, atunci ori de cîte ori este X este Y"; „Dacă Y este o condiție *sine qua non* pentru X, atunci ori de cîte ori este X este și Y" etc. Am putea să ne punem întrebarea ce anume este comun tuturor acestor propoziții care redau formele analitice? *Care este cu alte cuvinte criteriul abstract de analiticitate?*

În lucrarea noastră *Teoria carteziană a cunoașterii în „Reguli"*[2], am adoptat ca *explicant* al termenului „analitic" expresia „dat prin definiție".

Vom conveni în continuare să aplicăm termenul de *analitic* la acele relații între concepte (sau termeni) care pot fi date *prin definiție*. Că două concepte sînt legate între ele în *mod analitic*, aceasta va însemna că ele sînt *date împreună* printr-o definiție. Astfel, conceptele „om", „animal", „rațional" sînt legate între ele prin următoarea definiție: „Omul este animal rațional". Datorită acestei definiții, vom spune că propoziția: „Dacă Hercule este om, atunci el este animal rațional", este adevărată prin definiție.

Modul în care înțelegem raporturile analitice concordă, în esență, cu înțelesul acordat de către Descartes „conjuncțiilor necesare", de către Leibniz „adevărurilor rațiunii" și de către Kant „adevărurilor analitice". Putem împinge și mai departe studiul judecăților analitice pînă la singurul nivel posibil, anume la nivelul categoriilor. Se poate afirma că toate *categoriile polare* sînt legate între ele *în mod analitic*. Fiecare dintre formele analitice de mai sus ascunde o legătură între *categorii polare*. Fiecare dintre aceste categorii este definită prin raport cu corelata sa: identitatea prin raport cu diferența, prezența prin raport cu absența, condiția prin raport cu condiționatul,

---

[1] V. I. L e n i n. Opere complete, vol. 29, București, Editura politică, 1966, ed. a doua, p. 161.

[2] D e s c a r t e s. *Reguli utile și clare pentru îndrumarea minții în cercetarea adevărului*. Gh. Enescu, *Studiu introductiv*, București, Editura științifică, 1964.

individul prin raport cu genul, finitul prin raport cu infinitul etc. *În orice judecată concretă, dacă vom regăsi raportul dintre două categorii polare, oricît de particularizat ar fi acest raport, putem spune că ea este analitic adevărată*. De exemplu, dacă x este fenomenul esenței y, atunci x este determinat de y. Nicăieri nu vom găsi separate categoriile polare (A și contrariul său) și tocmai de aceea ele *nu pot fi gîndite separat unele de altele*. De aici decurge că *raporturile adevărate analitic* se află între conceptele (categoriile) care nu pot fi gîndite unul fără altul.

Orice judecată al cărei adevăr decurge dintr-o definiție *(se bazează pe o definiție) este o judecată analitic adevărată*. Judecata: „Omul este om" decurge din raportul dintre identitate și diferență, respectiv din afirmația (α) „$x \equiv y$" dacă și numai dacă $\overline{x \not\equiv y}$. Oricît de săracă în conținut ar fi această propoziție, ea este extrem de importantă. Sărăcia ei de conținut merge pînă acolo că propoziția de mai sus ne apare ca o simplă „tautologie", adică o propoziție în care se spune același lucru cu alte cuvinte: „a fi identic ($x \equiv y$) este sinonim cu „a nu fi diferit" $(\overline{x \not\equiv y})$. Aceasta se explică prin faptul că expresia „a fi identic" nu poate fi definită altfel decît prin expresia „a fi diferit". Aceasta nu înseamnă însă că în spatele expresiilor „a fi identic" și „a nu fi diferite de..." nu există o diferență precisă. La acest nivel categorial, conținutul determinat dispare, posibilitatea de a explica diferența dintre cele două expresii dispare și ea, dar noi știm că diferența reapare prin aplicațiile schemei la conținutul determinat. Astfel, faptul că „Vasile este Vasile" implică faptul că „Vasile nu este diferit de Vasile" (și reciproc), dar în mod concret aceasta înseamnă „Vasile de azi este dintr-un anumit punct de vedere Vasile de ieri" și, respectiv, „putem neglija proprietățile prin care Vasile de azi diferă de Vasile de ieri".

Mai departe, dacă presupunem că în schema (α) $x \equiv$ „om" și $y \equiv$ „om", se obține evident schema „om $\equiv$ om" prin simpla presupunere a adevărului definiensului „$\overline{\text{om} \not\equiv \text{om}}$".

În legătură cu raportul dintre categoriile polare, este interesant să amintim unele lucruri scrise de Engels în *Anti-Dühring*: „Întregul este mai mare decît partea. Această propoziţie este o pură tautologie, întrucît reprezentarea cantitativă de «parte» se raportează de la bun început într-un mod determinat la reprezentarea de «întreg», în sensul că «partea» implică nemijlocit că «întregul» cantitativ constă din mai multe «părţi» cantitative. Prin faptul că aşa-numita axiomă constată aceasta în mod expres nu am făcut nici un pas înainte. Această tautologie poate într-o anumită măsură să fie chiar *demonstrată*, atunci cînd se spune: un întreg este ceea ce constă din mai multe părţi (tautologia la nivelul categoriilor logice. — *Gh.E.*); o parte este ceea ce împreună cu alte părţi formează un întreg; prin urmare, partea este mai mică decît întregul (tautologia la nivel matematic. — *Gh.E.*) — o deducţie în care sterilitatea repetării scoate şi mai mult în evidenţă lipsa de conţinut"[1].

A doua propoziţie dată ca exemplu: „În fiecare zi plouă sau nu plouă" se întemeiază pe raportul analitic dintre prezenţă şi absenţă: „*X* este prezent dacă şi numai dacă *X* nu este absent". De aici decurge:

a) dacă *X* este prezent, *X* nu este absent;

b) dacă *X* este absent, *X* nu este prezent;

c) numai una din două: sau *X* este prezent, sau *X* este absent.

Toate aceste propoziţii sînt pure tautologii „derivate" într-un anumit fel din raportul analitic considerat.

Propoziţia a treia: „Dacă Gheorghe este *tată*, el are *copil*", se reduce, de exemplu, la afirmaţia tautologică: „Ceva este condiţie dacă şi numai dacă are condiţionat".

Cum prin definiţie „tată" ≡ „ceea ce are copil", propoziţia de mai sus este şi ea o pură repetiţie, cu referinţă la un caz particular, o relaţie dată prin definiţie, care la rîndul ei este un caz particular de raport analitic.

---

[1] F. Engels. *Anti-Dühring*, Bucureşti, Editura politică, 1966, ed.a IV-a, p. 43.

Să ne referim, în fine, la ultima propoziţie considerată: „Dacă Socrate nu este om, el nu este filozof". Această propoziţie este în definitiv expresia următoarei tautologii: „Dacă individul nu este subordonat genului, el nu este subordonat speciei acestui gen", căci „genul este ceea ce constă din specii".

Reţinem deci din cele de mai sus următoarele:

1) orice raport între categoriile polare va fi numit raport *analitic*;

2) orice definiţie nominală *construieşte* un raport analitic între termeni;

3) orice propoziţie care decurge dintr-o definiţie este o propoziţie analitică sau o „tautologie";

4) orice propoziţie care decurge din propoziţii analitice este ea însăşi analitică.

Am explicat ce înţelegem prin *analitic* şi am arătat că sursa propoziţiilor analitice este în experienţă, contrar afirmaţiei lui Kant că originea lor ar fi apriori. *Vide de conţinut în sensul că nu au nici un conţinut determinat, tautologiile (categoriale) sînt infinit de bogate în conţinut, întrucît se aplică la o infinitate de cazuri determinate.*

Din cele de mai sus rezultă că respingem orice afirmaţie care vrea să rupă tautologiile de conţinut şi de experienţă (vezi Wittgenstein, Russell, Carnap) sau care vrea să reducă propoziţiile analitice la simple convenţii terminologice, deşi convenţiile terminologice pot constitui un caz particular de raporturi analitice (vezi Ajdukiewicz).

Se fac adesea afirmaţii că propoziţiile analitice nu pot fi verificate în experienţă şi că în genere adevărul lor nu depinde de experienţă. Toate acestea sînt numai în parte adevărate. Este adevărat că nu ne putem propune să verificăm aceste propoziţii experimental şi că ele nu cer să fie cercetate (precizate) în funcţie de evoluţia experimentului (a practicii în genere), dar este tot atît de adevărat că:

a) ele s-au format o dată cu gîndirea în decursul unei practici milenare;

b) ele sînt generalizări care pornesc de la experiență (experiență foarte generală la rîndul ei);

c) însăși ideea *independenței* adevărului lor față de cazurile particulare ne este sugerată de experiență, în sensul că, *o dată ce am încercat să le aplicăm la cazuri noi, ele au dat rezultatul scontat.*

Logica modernă ne-a adus și o altă surpriză. Abia am găsit că tautologiile $p \rightarrow p$, $p \vee \bar{p}$, $\bar{\bar{p}} \rightarrow p$ sînt „absolut" independente de cazurile concrete, cînd a și apărut reacția împotriva acestei absolutizări: logica polivalentă. Tautologiile noastre depind de un conținut concret; ele nu sînt absolute, ci relative, *ele depind de sistemul de propoziții la care se aplică* (propoziții absurde, propoziții asupra numerelor iraționale, propoziții asupra infinitului, propoziții asupra gradului de decidabilitate, propoziții aproximative etc.). Dacă vrem să refacem „absolutul", va trebui să ținem seama de sistemul de referință (sistemul de propoziții) și cine știe dacă în continuare nu vom fi obligați la noi revizuiri. *Așadar, o respingere pe toate fronturile a concepției neopozitiviste.*

După această incursiune relativ de durată în problema propozițiilor analitice să revenim la chestiunea inițială: ce este *logica*, ce este *matematica*? Din cel puțin trei motive nu putem să luăm aici ca punct de plecare ideea de analitic: a) caracterul relativ al acestei noțiuni, b) posibilitatea existenței unui analitic convențional, c) ideea de analitic se definește ea însăși prin ideea de logic.

Pentru a răspunde la această întrebare va trebui să încercăm să dezvăluim conținutul termenului „logică" pe căile bătătorite deja, căci cercetarea definiției unui concept nu poate face abstracție de istoria dezvoltării lui.

De pe acum însă putem face o rezervă. Considerînd definiția: „Zeu este ceea ce este nemuritor", este adevărată implicația: „Dacă ceva este zeu, atunci este nemuritor". Adevărul acestei implicații depinde de definiția de mai sus, însă asemenea propoziții nu interesează logica, căci logica nu se ocupă de definiții particulare.

În *Burghezul gentilom*, profesorul de filozofie îi arată lui M. Jourdain că logica se ocupă de trei operaţii:

„*M. Jourdain*. — Que sont-elles ces trois opérations de l'esprit?

Le maître de philosophie. — La première, la seconde et la troisième. La première est de bien concevoir par le moyen des universaux, la seconde de bien juger par le moyen de catégories; et la troisième de bien tirer conséquence par le moyen des figures Barbara, Celarent, Darii, Ferio, Baralipton etc...

M. Jourdain. — Voilà des mots qui sont rébarbatifs. Cette logique-là ne me revient point. Apprennons autre chose qui soit plus joli*".

Concepţia aceasta poate să nu fie întru totul exactă, dar ea redă fidel un mod istoric de a vedea logica formală.

Cu privire la definiţia logicii, A. Church scrie: „Presupunînd că noţiunea de raţionament deductiv este cunoscută deja din experienţa care se referă la cazurile sale particulare, noi putem spune, mai degrabă ca o descriere decît ca definiţie, că logica este teoria raţionamentului deductiv plus tot ce se cere în limba-obiect sau în metalimbă pentru adecvarea, generalitatea şi simplitatea teoriei"[1].

Există încă zeci de definiţii ale logicii. Este inutil să ne ocupăm de ele. Presupunem că cititorul va înţelege mai bine ce este logica dacă vom porni de la un exemplu simplu.

Fie propoziţiile: „$2 + 2 = 4$" şi „$3 + 1 = 4$".

Este uşor de văzut că, *pornind de la aceste propoziţii, putem construi o a treia*, şi anume „$2 + 2 = 3 + 1$". *Cum am trecut* de la propoziţiile „$2 + 2 = 4$" şi „$3 + 1 = 4$" la propoziţia „$2 + 2 = 3 + 1$"? Iată o problemă care nu este de loc uşoară.

Să considerăm şi un alt exemplu. Fie propoziţiile :„Toţi oamenii sînt muritori" şi „Socrate e om". De aici putem construi

---

* *M. Jourdain*. — Care sînt aceste trei operaţii ale spiritului?

Profesorul de filozofie. — Prima, a doua şi a treia. Prima constă în a concepe bine cu ajutorul universalelor; a doua în a judeca bine cu ajutorul categoriilor şi a treia în a trage consecinţe cu ajutorul figurilor Barbara, Celarent, Darii, Ferio, Baralipton etc.

M. Jourdain. — Iată cuvinte rebarbative. Această logică nu mi se potriveşte; să învăţăm altceva mai frumos.

[1] A. Church. *Op. cit.*, p. 181.

propoziția: „Socrate este muritor". Din nou se pune problema: cum *am ajuns* la cea de-a treia propoziție? Se poate bănui că trecerea spre a treia propoziție (construirea celei de-a treia propoziții în funcție de primele două) nu e la fel în cele două exemple. Într-adevăr, este o mare deosebire între propozițiile :„2 + + 2 = 4" și „3 + 1 = 4", pe de o parte, și propozițiile: „Toți oamenii sînt muritori" și „Socrate este om", pe de altă parte. Putem deci formula în general problema de mai sus în felul următor: cum putem trece de la unele propoziții la altele sau *cum putem construi unele propoziții în funcție de altele de un anumit tip*. Pentru a rezolva această problemă se observă că va trebui în prealabil să ne ocupăm de *tipul de propoziții*, avînd în vedere că de aceasta depinde modul de construire a celei de-a treia propoziții. Ce este, așadar, *tipul* propozițiilor de care depinde construirea unei a treia propoziții? Vom considera următoarele trei propoziții:

a) „Soarele este luminos";

b) „Clasa plantelor este cuprinsă în clasa viețuitoarelor";

c) „Craiova se află între București și Timișoara".

Deosebirea dintre aceste trei propoziții este evidentă: fiecare dintre ele ne comunică o anumită informație (ne spune ceva) despre anumite lucruri. Să comparăm aceste trei propoziții cu altele trei:

a)' „Becul electric este luminos";

b)' „Clasa mamiferelor este cuprinsă în clasa animalelor";

c)' „Constanța se află între Mamaia și Eforie".

Nu este greu de observat că propoziția „Soarele este luminos" este mai apropiată de propoziția „Becul electric este luminos" decît de propoziția „Clasa mamiferelor este cuprinsă în clasa animalelor", deși, evident, între propoziția „Soarele este luminos" și „Becul electric este luminos" este o deosebire de *informație* (una ne comunică o informație despre Soare, alta despre becul electric). În general, asociațiile care ne vin în minte pot fi următoarele: a) cu a)', b) cu b)' și c) cu c)'. Ceea ce ne împinge la aceste asociații este faptul că, deși propozițiile respective cuprind informații asupra unor obiecte diferite, ele transmit totuși același *tip* de informație.

Astfel propoziţiile a), a)' ne arată că „un obiect are o proprietate" (respectiv obiectul *Soarele* are proprietatea *luminos* şi obiectul *becul electric* are proprietatea de a fi *luminos)*; propoziţiile b) şi b)' ne arată că „o clasă de lucruri este cuprinsă în alta", iar propoziţiile c) şi c)' că „un lucru se află într-o anumită relaţie cu altele" (respectiv într-un anumit raport spaţial). Vom spune că propoziţiile a), a)' ne dau informaţii despre raportul dintre obiecte şi proprietăţi, propoziţiile b), b)' ne dau informaţii despre raporturile dintre clasele de obiecte, iar propoziţiile c), c)' ne informează despre raporturile dintre obiecte. Tipul de propoziţie este, aşadar, determinat de *tipul de informaţie* pe care propoziţia o comunică.

A spune că „propoziţia este adecvată pentru a comunica o anumită informaţie" este tot una cu a spune că „propoziţia are o anumită structură logică". Structura logică a propoziţiei este determinată de felul raportului real pe care propoziţia îl exprimă. Corespunzător celor trei tipuri de raporturi, vom avea propoziţii predicative, extensive şi de relaţie.

Am arătat mai sus o primă problemă care se pune în legătură cu *raporturile* dintre propoziţii: cum putem trece de la unele propoziţii la altele. Această problemă presupune analiza tipului de propoziţie sau, cum se spune în mod curent, a „structurii logice" a propoziţiilor. Trecerea însă de la unele propoziţii la altele mai poate fi condiţionată şi de alte determinări ale propoziţiei decît structura logică (tipul de propoziţie). Considerăm din nou unele exemple. Fie propoziţiile „$2 + 2 = 4$" şi „$2 + 3 = 4$". Pentru orice om care înţelege aceste propoziţii şi cunoaşte aritmetica elementară, aceste propoziţii vor stîrni o apreciere diferită. Vom spune că propoziţia „$2 + 2 = 4$" este *adevărată*, iar propoziţia „$2 + 3 = 4$" este *falsă*. Propoziţia „$2 + 2 = 4$" este adevărată deoarece *în realitate* ori de cîte ori adunăm două obiecte cu altele două (de acelaşi fel) obţinem patru obiecte. Propoziţia „$2 + 3 = 4$" este falsă deoarece *în realitate* nu se întîmplă niciodată ca două obiecte adunate cu trei obiecte să dea patru obiecte, ci cinci. Ce este, aşadar, adevărul şi ce este falsul unei propoziţii?

Informaţia unei propoziţii (şi deci propoziţia) este adevărată dacă şi numai dacă lucrurile (stările de lucruri) despre care vorbeşte propoziţia stau întocmai aşa cum arată propoziţia; dacă lucrurile (stările de lucruri) nu stau astfel, vom spune că informaţia propoziţiei (propoziţia) este falsă. Aprecierile de „adevărat" şi „fals" se referă, aşadar, la propoziţii şi nu la lucrurile despre care vorbesc propoziţiile. Este un principiu fundamental al gîndirii: *a vorbi despre propoziţie nu este tot una cu a vorbi despre acelaşi lucru ca şi propoziţia*. De exemplu, cînd spunem „Socrate este muritor", noi vorbim despre Socrate (ceva deosebit de propoziţie) şi nu despre propoziţia „Socrate este muritor". Trebuie să avem un procedeu pentru a distinge între aceste două nivele ale vorbirii (şi, respectiv, ale gîndirii). Pentru a vorbi despre obiect, folosim propoziţiile limbii pur şi simplu fără vreun indiciu special; pentru a vorbi despre o propoziţie, vom introduce expresia respectivă (propoziţia) în ghilimele, aşa cum am făcut mai sus. Vrem acum să exprimăm faptul că propoziţia este adevărată în dependenţă de starea de lucruri la care se referă. Vom scrie, de exemplu, „$2 + 2 = 4$" este *propoziţie adevărată* dacă şi numai dacă $2 + 2 = 4$. Altfel: dacă şi numai dacă $2 + 2 = 4$, propoziţia „$2 + 2 = 4$" este adevărată. Sau: dacă şi numai dacă are loc faptul că $2 + 2 = 4$, propoziţia „$2 + 2 = 4$" este adevărată. În cazul că avem propoziţia falsă, de exemplu „$2 + 3 = 4$", vom scrie: dacă şi numai dacă nu are loc faptul că $2 + 3 = 4$, propoziţia „$2 + 3 = 4$" este *falsă*. Se înţelege că pe noi ne interesează în primul rînd propoziţiile adevărate. Ne interesează deci ca, pornind de la anumite propoziţii, să ajungem la propoziţii adevărate. *Cum putem ajunge la propoziţii adevărate pornind de la alte propoziţii?* Iată o altă (a doua) problemă fundamentală care este implicată în trecerea de la unele propoziţii la altele.

Calitatea propoziţiei de a fi adevărată sau falsă poartă numele de „valoare logică" sau „valoare de adevăr".

Dacă noi vrem să ajungem la propoziţii adevărate pornind de la alte propoziţii, trebuie să cunoaştem valoarea propoziţiilor iniţiale. Astfel, de la propoziţiile adevărate „$2 + 2 = 4$"

și „$3 + 1 = 4$" ajungem la propoziția adevărată „$2 + 2 = 3 + 1$". Din cele spuse mai sus deosebim deci problemele: a) a trece de la unele propoziții la altele (a construi unele propoziții în funcție de altele), b) a trece de la propoziții cu o *anumită* valoare la propoziții de asemenea cu o anumită valoare (de preferință adevăr). Așa cum vom vedea, problema a) este subordonată problemei b) și se rezolvă în dependență de aceasta.

Putem presupune însă că avem o mulțime de propoziții și vrem să știm:

c) se poate construi propoziția în funcție de propozițiile cutare?

d) se poate determina valoarea unei propoziții în funcție de valoarea altor propoziții?

Acestea sînt, în fond, două probleme noi. Procesul de rezolvare a acestor probleme poartă numele în logică de „deducere" și, respectiv, „demonstrare".

Diferența dintre „a deduce" și „a demonstra" constă în faptul că „a demonstra" înseamnă „a deduce din propoziții cu valoarea dată" sau „a determina valoarea unei propoziții pe baza altora", în timp ce a deduce nu presupune valoarea propozițiilor.

Am văzut însă că trecerea de la unele propoziții la altele depinde de tipul și de valoarea propozițiilor date. Există multe moduri de a efectua această trecere. Ca în multe cazuri, în cunoaștere *ne interesează acele moduri (ale proceselor) cu valoarea generală (universală). A găsi aceste moduri în care se efectuează deducția (și în speță demonstrația) este principala sarcină a logicii, este finalitatea logicii.* Modurile acestea sînt guvernate de „legi de deducție" sau (metodologic) „reguli de deducție". Vorbim de asemenea de „legi de raționare", „scheme de raționare", „procedee de raționare". Orice lege (sau regulă de raționare) trebuie să satisfacă următoarea condiție: *dacă propozițiile de la care pornim (ipotezele, premisele) sînt adevărate, atunci rezultatul (concluzia) trebuie să fie adevărat în urma aplicării legii (regulii) respective.* Putem defini deci logica în felul următor: *logica este știința care studiază legile care ne permit să trecem de la propoziții*

*adevărate date la propoziții de asemenea adevărate**. Deoarece aceste legi se mai numesc și *forme logice* (în virtutea independenței lor de un anumit conținut), logica, la rîndul ei, se mai numește și *logică formală*, în scopul de a se deosebi de alte utilizări ale termenului logică. Logica formală s-a dezvoltat în două etape: etapa logicii generale (aristotelice) și etapa logicii matematice (simbolice). Logica generală descrie modurile de raționare așa cum funcționează ele în gîndirea obișnuită. Ea satisface în mod evident definiția de mai sus. De exemplu, ea studiază moduri de raționare cum sînt Barbara, Celarent, Darii, Ferio etc.

Iată modul Barbara: „Dacă *B* este *C* și *A* este *B*, atunci *A* este *C*". Nici logica matematică nu studiază altceva decît logica generală, numai că ea diferă în unele puncte de vedere, de exemplu ea introduce *principii de ierarhizare a conceptelor*, folosește procedee de calcul și face într-un grad mai mare abstracție de conținut. De asemenea intensifică și perfecționează aplicațiile metodei deductive și ale formalizării în construirea științei logice ca *teorie*. Să considerăm, de exemplu, următoarele legi logice: $(A \& B) \rightarrow (B \& A)$, $\overline{(A \& B)} \rightarrow (\bar{A} \vee \bar{B})$.

Ținînd seama de posibilitățile de interpretare în domeniul gîndirii, aceste scheme exprimă următoarele moduri de deducție: „Dacă este adevărată conjuncția de premise *A* și *B*, atunci este adevărată și conjuncția de premise *B* și *A*" și „Dacă nu este adevărată conjuncția de premise *A* și *B*, atunci cel puțin una dintre cele două premise este falsă". Este important să observăm că mulțimea de propoziții $(A, B, C, \ldots)$ de la care pleacă logica matematică este înțeleasă strict ca *mulțime de premise*.

De ce ca mulțime de premise? Această mulțime formează o conjuncție. Or, conjuncția logică-matematică are proprietatea comutativității, care nu este satisfăcută de orice conjuncție concretă între propoziții. Dimpotrivă, conjuncția premiselor trebuie să satisfacă totdeauna o astfel de proprietate.

Trebuie să răspundem acum la întrebarea *ce este matematica*. În lucrarea sa *Anti-Dühring*, F. Engels dă următoarea defini-

* Forma universală la care poate fi redus orice raționament (inclusiv cel inductiv) este raționamentul ipotetic-categoric (cu cele două forme ale sale: *modus ponens* și *modus tollens*).

ție matematicii: „Matematica pură are drept obiect formele spațiale și raporturile cantitative ale lumii reale, adică un material foarte real"[1].

Este destul de ușor să ne convingem că această definiție corespunde concepției lui Frege și Russell, întemeietorul logicismului, și în general ea corespunde concepției despre matematică a tuturor matematicienilor vremii, care vedeau în numărul natural atomul matematicii. Această *matematică*, care se sprijinea pe număr, pentru care *alfa* și *omega* era numărul, urma să fie redusă la logică. Trebuia redusă matematica, știință al cărei scop este să rezolve *probleme de natură cantitativă*, la logică, știință a cărei finalitate este să rezolve *probleme de adevăr*.

Nu este vorba de legătura strînsă care există între logică și matematică. Asupra acestui lucru a atras atenția chiar Engels în *Anti-Dühring*: „Axiomele matematice sînt expresiile conținutului de idei extrem de sărac pe care matematica trebuie să-l împrumute de la logică. Ele pot fi reduse la următoarele două:

1. Întregul este mai mare decît partea...

2. Două mărimi egale cu o a treia sînt egale între ele. Această propoziție este, cum a demonstrat Hegel, un silogism a cărui exactitate o garantează logica, o propoziție care este deci demonstrată, deși în afara matematicii pure. Celelalte axiome despre egalitate și inegalitate nu sînt decît dezvoltări logice ale acestui silogism"[2].

Înțelesul mai adînc al acestui text, care pare să dea dreptate logicismului, va fi dezvăluit ulterior. Deocamdată revenim la problema noastră principală: este matematica reductibilă la logică?

Nici o soluție nu poate să facă abstracție de faptele deja stabilite (definiția numărului și celelalte). În definitiv, răspunsul la problemă va însemna tocmai găsirea unei interpretări adecvate (și — de ce nu? — convenabile) a acestor fapte.

---

[1] F. Engels. *Op. cit.*, p. 42.
[2] Ibidem, p. 43—44.

Orice soluţie ar fi adoptată, ea trebuie să stabilească dacă cele două ştiinţe au sau nu între ele vreo limită demnă de a fi luată în consideraţie. De la început rezolvarea atrage după sine importante consideraţii metodologice şi un aparat conceptual cît de cît precis. Trebuie să excludem în primul rînd punctul de vedere metafizic conform căruia între ştiinţe ar putea exista „limite absolute". De asemenea nu cred că este bine să pornim de la ideea că „limitele sînt absolut convenţionale". În fond, totul depinde de ceea ce numim „elementar" sau „obiect elementar" al ştiinţei date. Dacă vom considera, de exemplu, că obiectul elementar al matematicii este „numărul", atunci mulţimile în genere vor constitui obiectul unei teorii mai simple, „teoria mulţimilor", sau „teoria claselor". Distincţia între „teoria mulţimilor" şi „teoria numerelor" nu este nici absolută, nici pur convenţională. Frege şi Russell au construit „numărul" din obiecte şi raporturi mai simple care stau la baza teoriei mulţimilor. Nu văd nici un motiv pentru a respinge definiţia dată mai sus.

Ea stabileşte faptul că obiectul „elementar" al matematicii nu este un „atom" în sensul lui Democrit, ci poate fi „redus" la obiecte mai simple. *El este o intersecţie a unor raporturi mai simple*. Caracterul însuşi al definiţiei („definiţie contextuală") mă face să mă gîndesc la acest lucru. Diferenţa dintre „mulţimile de obiecte concrete" şi „numere" nu se anulează însă prin această „reducere". Această diferenţă este esenţială în următoarele puncte:

a) dacă numărul este tratat ca „clasă a tuturor claselor echipolente cu clasa dată", atunci el se deosebeşte de orice clasă (finită după cum s-a stabilit) exact prin aceea că numărul este totdeauna o clasă infinită (căci numărul claselor care pot fi puse în corespondenţă biunivocă cu clasa dată este nelimitat);

b) dacă numărul este tratat ca o proprietate, atunci între el şi clasă există diferenţa exactă pe care o facem între obiect şi oricare proprietate a lui în parte;

c) dacă ne asociem unui punct de vedere anterior logicismului (vezi Kronecker, Dedekind, Peano), atunci numărul este un *obiect*, dar în înţelesul restrîns de *obiect abstract*.

Dacă deci noi ne vom opri la număr ca la o piatră de hotar între teoria mulţimilor şi aritmetică, atunci această alegere nu este chiar arbitrară, căci avem temeiuri necesare de distincţie; deosebirile esenţiale dintre mulţimile de obiecte concrete şi o mulţime de obiecte abstracte, dintre finit şi infinit, dintre mulţime şi proprietate, dintre mulţime în genere şi mulţimile determinate — numerele. Aşadar, în nici un caz nu putem confunda *teoria mulţimilor* în genere cu teoria unor mulţimi speciale: *teoria mulţimilor-numere*. Este drept că numărul apare în mod constructiv ca o intersecţie de noţiuni şi relaţii mai elementare („mulţime", „toţi", „echipolenţă"), dar *întregul* dobîndeşte proprietăţi care nu sînt reductibile la elementele din care este construit, de exemplu, caracterul nelimitat al mulţimii-număr. Să admitem totuşi pentru un moment „reducţia completă" a teoriei numerelor la teoria generală a mulţimilor. Pentru a da un răspuns problemei ridicate de logicişti, va trebui să rezolvăm chestiunea dacă teoria claselor face parte din logică sau nu. Dacă teoria claselor va fi inclusă în logică, atunci vom admite că matematica este reductibilă la logică. Dacă teoria claselor va fi inclusă în matematică, atunci matematica nu este reductibilă la logică. Totul depinde deci de cadrul în care plasăm „teoria claselor". Am văzut că în înţelesul cel mai des uzitat al termenului de „logică", nu avem nici un motiv să includem ca scop al logicii *studiul structurii propoziţiilor, dar acesta este necesar întrucît vrem să construim scheme de raţionare*. Din acest punct de vedere, noţiunile de „mulţime" (clasă) şi „apartenenţă" sînt pentru logică un punct de plecare de care ea se interesează în mod direct exclusiv în măsura în care aceasta duce la punctul ei de sosire (descoperirea procedeelor de raţionare). Mai mult, încă de pe acum se vădeşte necesitatea unei terminologii speciale, adecvată necesităţilor logicii, deosebită de terminologia matematică; astfel se vorbeşte de logica claselor (teoria claselor) şi de teoria mulţimilor (în matematică). Am văzut că un savant ca Fraenkel pune chiar la îndoială faptul dacă tre-

buie să identificăm *teoria claselor* cu *teoria mulțimilor*. Într-adevăr, scopul logicii fiind acela de a descoperi legi de raționare, de ce ar trebui să se mai intereseze de asemenea raporturi cum sînt cele numerice, care nu aduc nimic pentru acest scop. Dacă ea, totuși, ar face-o, ar face-o în măsura în care observarea gîndirii concrete este necesară pentru aflarea schemelor ei generale.

Pe de altă parte, este evident că există o teorie cu o finalitate bine definită, deosebită de finalitatea logicii: teoria care vizează studiul raporturilor cantitative (numerice). Faptul că această teorie este numită „aritmetică", „teoria numerelor" sau „matematică" nu mai este în definitiv decît o chestiune terminologică. Dacă noi facem din teoria mulțimilor și teoria predicatelor ramuri ale matematicii, atunci ajungem la concluzia că logica este construită în funcție de anumite raporturi matematice și deci posibilitatea de a trece de la o extremă la alta: *logica este o ramură a matematicii!*

Totuși, veți fi de acord că este o deosebire esențială între „a gîndi cantități" și „a gîndi despre gîndire".

Care mai poate fi în acest caz soluția? Pentru a nu pune la un loc elemente eterogene, *schemele de raționare* și *numerele* (raporturile numerice), eu cred că nu există decît o singură soluție: a admite că există „regiuni ale nimănui" sau „zone neutre", *care constituie puncte de plecare și de intersecție a două științe*, cu domenii, de altfel, clar delimitate. Așadar, soluția noastră constă în admiterea „zonelor intermediare" între cele două științe. Matematica studiază raporturile dintre mulțimi cu scopul de a-și construi conceptele și raporturile sale fundamentale (respectiv numărul și relațiile $<$, $=$, $>$). Logica studiază aceleași raporturi cu scopul de a construi unele *scheme originale de raționare*. În delimitarea științelor nu se pune problema „sau... sau", ci există, cum am spus, „regiuni ale nimănui", „zone neutre", „zone intermediare" sau „zone de trecere" (cum le putem denumi). *Păstrîndu-și independența lor relativă, științele se întrepătrund și își împrumută reciproc procedeele de cercetare și de rezolvare.*

Nu trebuie să pierdem din vedere și posibilitatea ca unele științe să se afle în raport de *analiticitate* cu altele (adică concep-

tele lor fundamentale să fie definite din conceptele altor științe). Această „reducere" prin definiție (analitic) nu trebuie să constituie un motiv pentru „a desființa" o știință în favoarea alteia. Să considerăm mai îndeaproape acest caz. O asemenea „reducere" se bazează pe faptul că un obiect elementar poate fi, în fond, o *intersecție* de obiecte mai simple, dar această intersecție este ceva sui-generis și deci în *totalitatea* ei ireductibilă la ceva mai simplu. Dar, indiferent cît de departe ar merge reducția, pentru logică este adevărat că ea nu se ocupă de concepte și de relații particulare (număr, succesor, biunivocitate etc.) chiar dacă acestea ar putea fi construite din elemente logice. Problema poate fi pusă însă și sub un aspect obișnuit: schemele logice fiind mai simple, este firesc ca ele să se regăsească în raporturile mai concrete. În acest sens, științele particulare sînt, după expresia lui Lenin, „logică aplicată". În același mod înțelegem și reflecțiile lui Engels citate mai sus. Pentru ca cititorul să aibă o imagine mai exactă asupra adevărului acestor reflecții, îl vom trimite la lucrarea lui P.S. Novikov *Elemente de logică matematică*, capitolul al III-lea, § 8, „Axiomele șirului numerelor naturale" (p.145). Aceste axiome sînt expresia particulară (aplicarea la concepte și relații particulare: numere naturale, relațiile $<, =, >$) a unor propoziții formulate în logică. Astfel, axioma I. 1 „$x = x$" este doar un caz particular al identității $A \equiv A$ aplicată la numere (egalitatea fiind o identitate numerică). Ax.I.2. este un caz particular al definiției identității (definiție dată de Leibniz). Ax. II. 1. este un caz particular al expresiei $\overline{A \not\equiv A}$ (*A* nu poate fi diferit de *A*), Ax. II. 2. este un caz particular al legii tranzitivității; la fel Ax. II. 3. În ce privește Ax. III (regula inducției matematice), ea nu reprezintă, așa cum a arătat Poincaré, decît un caz particular de raționament ipotetic-categoric.

Adevărul axiomelor de mai sus este împrumutat de la tautologiile logice corespunzătoare. În ce sens „axiomele matematice sînt expresiile conținutului de idei extrem de sărac pe care matematica trebuie să-l împrumute de la logică" *(Engels)*? În sensul că ele nu spun nimic altceva decît tautologiile logicii, în afară doar de faptul că aceste tautologii sînt adevărate și

pentru un caz particular (şi se indică anume care caz). Într-adevăr, din moment ce egalitatea este un soi de identitate, decurge automat că $x = x$. Expresia $x = x$ împrumută conţinutul „extrem de sărac" al tautologiei $A \equiv A$. Aşa cum am mai spus, dacă o relaţie particulară este subordonabilă unei tautologii, ea este adevărată prin însăşi acest fapt. Pe de altă parte însă, oricît de săracă în conţinut ar fi relaţia particulară, ea este totuşi mult mai bogată în conţinut decît orice relaţie universală căreia i se subordonează. Eşecul logicismului este încă o dovadă în acest sens. Pornind de la ideea de a deduce matematica *(ştiinţa despre numere*, cum era înţeleasă în acel timp) din logică (logică ce avea pentru ei mai degrabă sensul de *ontologie a claselor)*, logiciştii au încălcat de la început un şir de reguli metodologice:

a) particularul este prin definiţie ireductibil la general;

b) în definiţia unei ştiinţe nu intră numai punctele ei teoretice de plecare (concepte, termeni primitivi), ci şi punctul de sosire (finalitatea ei), asta cu atît mai mult cu cît în punctele lor de plecare ştiinţele se întîlnesc, formează „interferenţe", „zone neutre", „regiuni ale nimănui";

c) între ştiinţe nu există graniţe absolute, aşa cum între domeniile, laturile realului nu există asemenea graniţe, dar nici nu dispare orice diferenţă esenţială, cu alte cuvinte delimitările nici nu sînt pur convenţionale;

d) punctele de contact, de continuitate ale ştiinţelor sînt expresia unităţii lor, unitate care nu anulează diversitatea, aşa cum în realitate unitatea există numai în diversitate;

e) stabilirea terminologiei trebuie să se facă prin raport cu conţinutul, cu obiectul ştiinţei, nu pur şi simplu convenţional sau în virtutea unor aparenţe.

Cu toate aceste erori *de drept* alături de o serie de erori *de fapt*, mişcarea logicistă nu trebuie subestimată. În ştiinţă se întîmplă adesea ceea ce i s-a întîmplat lui Columb: se caută India şi se descoperă America. Nu ne declara oare Einstein că relativismul lui Mach i-a atras atenţia asupra relativităţii din lumea fizică? Chiar dacă nu confirmă teza logicistă, rezultatele obţinute de către Frege, Whitehead, Russell, Quine şi alţi repre-

zentanţi ai logicismului sînt de o însemnătate excepţională pentru dezvoltarea logicii şi a matematicii. Oricine parcurge lucrările *Grundlagen der Arithmetik* (Frege), *Principia Mathematica* (Whitehead şi Russell), *Mathematical Logic* (Quine) îşi dă seama de importanţa lor capitală pentru istoria logicii şi a matematicii. Semnificaţiile filozofice ale rezultatelor pozitive şi ale eşecului sînt de asemenea incontestabile. Ele arată în primul rînd *împingerea filozofiei matematice din interior de pe poziţiile metafizicii platonice spre poziţiile materialismului dialectic*. De la obiectul abstract absolut elementar — atomul numeric — la numărul infinit de complex al lui Frege şi Russell, iată cum am putea rezuma o întreagă etapă din evoluţia matematicii, dar numai o etapă, căci...

5. DE LA O EXTREMĂ LA ALTA

Am văzut că teza logicistă a fost combătută cu febrilitate; construcţiile care pretindeau să justifice această teză au fost asaltate. Unele dintre aceste atacuri împotriva logicismului au început să fie purtate sub o lozincă nouă. Să dăm cuvîntul lui Arend Heyting, unul dintre întemeietorii intuiţionismului logic-matematic.

„După Brouwer, matematica este identică cu partea exactă a gîndirii noastre... Nici o altă ştiinţă — în particular nici filozofia, nici logica — nu poate sluji drept premisă pentru matematică. Ar fi un cerc vicios să aplicăm în calitate de mijloace de demonstraţie vreun principiu filozofic sau logic, deoarece în formularea acestor principii se presupun deja noţiunile matematicii"[1]. La acestea Heyting adaugă: „Pe de o parte matematica este independentă de logică, iar pe de altă parte logica face parte din aplicaţiile matematicii"[2]. În ce priveşte logica matematică în special, el afirmă: „Există reguli generale după care se poate într-un mod general, intuitiv clar, forma noi teoreme plecînd

---

[1] A. Heyting. *Les fondaments des mathématiques. Intuitionisme. Théorie de la demonstration*, Paris, Louvain, 1955, p. 14.
[2] Ibidem, p. 16.

de la teoremele matematice date; teoria acestor conexiuni e făcută într-o «logică matematică», care devine atunci o parte a matematicii şi a cărei folosire în afara matematicii ar fi lipsită de sens"[1].

Iată deci o nouă teză, opusă tezei logiciste. Are sens să numim această teză „teza matematistă" pentru a sublinia exact semnificaţia ei. În conformitate cu această teză, vom numi concepţia corespunzătoare „matematism". Nu a existat un „program matematist" aşa cum a existat un „program logicist". Teza matematistă a fost asociată unor concepţii intuiţioniste, formaliste (cu unele rezerve), şi mai ales ea a fost împărtăşită de mulţi matematicieni care adoptă concepţii simpliste şi chiar vulgare asupra logicii şi matematicii. Putem afirma cu deplină dreptate că, deşi n-a existat un program matematist, teza matematistă a avut şi are o circulaţie cu mult mai largă decît teza logicistă. Există, poate, aici şi o explicaţie psihologică: teza logicistă afecta într-un mod neplăcut orgoliul matematicianului. Însă aparenţele prevalează în justificarea concepţiilor matematiste. Merită să fie discutat acest punct de vedere, care comite erori grave de natură metodologică.

Subordonarea logicii (în special a logicii simbolice) se face de obicei în două sensuri: existenţial şi metodologic. În sens existenţial, logica este o ramură a matematicii (adică obiectul logicii face parte din obiectul matematicii) în sens metodologic, logica este un instrument destinat exclusiv utilizării matematice. Am văzut că intuiţioniştii (Brouwer, Heyting) împărtăşesc ambele puncte de vedere, deşi ei, ca de altfel şi alţii, nu-şi dau nicăieri silinţa să le demonstreze. Problema raportului dintre ştiinţe, oricît s-ar încerca să fie abordată cu mijloace speciale, *este în primul rînd o problemă filozofică*. Dar ea are şi un aspect practic, care vizează justa orientare şi organizare a activităţii ştiinţifice, căci nu rareori reprezentanţii unei extreme caută să-şi impună punctul de vedere cu mijloace administrative chiar înaintea oricărei clarificări teoretice a problemelor, cu alte cuvinte „polemica teoretică" devine uneori „administra-

---

[1] Ibidem, p. 17.

tivă" chiar înainte de clarificare. Cine cunoaşte cît de cît istoria concretă a dezvoltării ştiinţei în diverse ţări ştie că polemicile din filozofia ştiinţei au degenerat adesea în „dispute" administrative, iar uneori ele au fost asociate chiar cu atitudini politice concrete. Este revelatoare sub acest ultim aspect acuzaţia pe care unul dintre elevii lui Russell, anume Ramsey, a adus-o intuiţionismului, anume că reprezintă o „ameninţare bolşevică din partea lui Brouwer şi Weyl".

Am spus că problema care ne interesează este o problemă filozofică, însă ea presupune că sîntem la curent cu principalele realizări din fundamentele matematicii, dar mai ales din logica matematică, căci în definitiv soarta ei se discută. Cunoaştem destui matematicieni care au fost în acelaşi timp mari filozofi (aş aminti aici pe Descartes şi Leibniz în primul rînd), însă despre majoritatea lor se poate spune că dincolo de limbajul simbolic nu se mai simt în siguranţă. Explicaţia este simplă: filozofia este în primul rînd *deprindere de a filozofa* (mod de a gîndi) şi nu o sumă de cunoştinţe însuşite pe apucate. Merită să amintim aici cele spuse de N. Bourbaki în lucrarea *Elemente de istorie a matematicii*: „Punctul de vedere al matematicienilor asupra problemelor de natură filozofică, chiar dacă aceste probleme au o importanţă esenţială pentru ştiinţa lor, în majoritatea cazurilor se întemeiază pe păreri provenite din mîna a doua sau a treia, precum şi din izvoare de o valoare îndoielnică"[1]. După părerea noastră, de această categorie sînt şi ideile matematiste asupra logicii. Vom încerca să analizăm aceste idei cît se poate de obiectiv.

Care sînt principalele „argumente" în virtutea cărora circulă concepţiile matematiste asupra logicii? După părerea noastră, ele pot fi reduse la cele de mai jos.

Logica este subordonată matematicii, deoarece: a) foloseşte limbajul matematic (simbolic); b) este o ştiinţă formală (formalizată) ca şi matematica; c) foloseşte calculul matematic; d) studiază „procesele logice folosite în raţionamentele matematice" (este deci teoria demonstraţiei matematice); e) are exacti-

---

[1] Nicolas Bourbaki. *Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris, 1960, p. 22.

tatea matematicii; f) utilizează concepte matematice; g) este un instrument destinat exclusiv nevoilor matematicii.

Toate aceste argumente par a fi în aşa măsură „de bun-simţ", încît ele constituie un fel de mentalitate vulgară asupra logicii. Toate argumentele de mai sus au ca punct de plecare o anumită definiţie a matematicii şi de aici o anumită definiţie a logicii. Trebuie să mai arătăm că în momentul de faţă nu dispunem de o definiţie precisă a matematicii, aşa cum se dispunea în secolul trecut. Termenul „matematică" a început să fie aplicat aproape la orice are vreo contingenţă cu ceea ce se numea în trecut matematică. Se poate spune că nu există nici o regulă în extinderea şi în general în utilizarea acestui termen. Primul viciu, aşadar, în utilizarea acestui termen constă în aceea că *majoritatea celor ce-l utilizează nu indică vreo regulă prin care se stabileşte semnificaţia termenilor*. Probabil ei presupun că utilizarea termenilor este pur convenţională şi bazată pe aparenţe: „Fiecare vorbeşte cum îi place". Există, totuşi, o limitare esenţială în utilizarea limbajului: *eficienţa*. Eficienţa este o cerinţă pragmatică, dar tocmai de aceea extrem de importantă. Această eficienţă cere să se stabilească anumite raporturi între *termen* şi *semnificaţia* sa (ceea ce el semnifică, desemnează). Este vorba, în definitiv, de următoarea cerinţă, care poate fi numită „postulatul terminologiei":

I. *Ceea ce în realitate este distinct să se desemneze distinct; ceea ce în realitate este identic să se desemneze prin acelaşi*. Există diferite mijloace de a realiza acest deziderat: sau folosim pentru fiecare aspect distinct al realului un singur termen (elementar), sau folosim expresii formate din mai mulţi termeni, sau folosim termeni contextuali. De exemplu, doi gemeni abia născuţi vor fi numiţi fiecare cu cîte un nume: „Ion" şi „Gheorghe"; autorul necunoscut al unei opere *X* va fi numit „autorul operei *X*"; în contextele logicii matematice, termenul „propoziţie" va avea altă semnificaţie decît în contextele gramaticii. Termenul „om" va desemna ceea ce este identic în fiecare individ uman, adică ceea ce este acelaşi în *X*, *Y*, *Z*,... (care sînt indivizii umani).

Nu este nevoie să mai discutăm faptul că *postulatul terminologiei* este subordonat legilor cunoaşterii şi că în acest sens este şi un postulat gnoseologic. În gnoseologia materialist-dialectică, orice construcţie subiectivă (implicit terminologia) este în ultimă instanţă funcţie de obiect şi deci orice problemă care nu mai poate fi soluţionată independent de obiect îşi găseşte soluţia prin trimiteri (raportări) la obiect. Aşa-numita „criză" din fundamentele matematicii a fost în ultimă instanţă şi o *criză terminologică* şi s-a soldat cu o revizuire a unei serii întregi de termeni. Aşa cum vom avea prilejul să ne convingem, orice criză terminologică exprimă în ultimă instanţă o ruptură flagrantă cu obiectul ei, o uitare a punctului ei de sprijin. Logicianul german Paul Lorenzen, unul dintre cei mai mari logicieni contemporani, atrage atenţia în lucrarea sa *Meta-mathematik* asupra unui paradox care însoţeşte folosirea termenului „matematică" în momentul de faţă. Acest paradox apare o dată cu introducerea de către Hilbert a termenului „metamatematică". Iată ce scrie Paul Lorenzen: „Apare o anumită dificultate în ce priveşte matematica. Dacă metamatematica este o teorie matematică avînd ca obiect al său întreaga matematică, atunci ea devine propriul său obiect"[1].

Sînt încălcate aici, pe lîngă postulatul terminologiei (I), următoarele postulate gneoseologice legate de altfel de postulatul terminologic de mai sus:

II. Orice obiect este deosebit de reflectarea sa;

III. Obiectul există independent de reflectarea sa (existenţa obiectului nu presupune reflectarea sa);

IV. Obiectul este prim, reflectarea sa este secundă (reflectarea presupune totdeauna existenţa obiectului). Toate aceste postulate pot fi reformulate în mod semantic;

II′ Orice obiect se deosebeşte de expresia sa;

III′ Orice obiect există independent de expresia sa;

IV′ Orice obiect este prim prin raport cu expresia sa.

Legătura acestor postulate cu răspunsul materialist la problema fundamentală a filozofiei nu stîrneşte nici o îndoială.

---

[1] Paul Lorenzen. *Meta-mathematik*, vol. I, Mannheim, 1962, p. 7.

Este necesar însă să observăm că aceste reguli privitoare la expresii trebuie să fie însoţite de oarecare restricţii atunci cînd este vorba de propoziţiile *necesar* autologice. Vom numi expresie *autologică* o expresie care face parte din domeniul ei de obiecte (o expresie care se autodesemnează). Atunci cînd autoraportarea expresiei nu poate fi evitată vom spune că expresia este *necesar autologică*, atunci cînd autoraportarea expresiei depinde de anumite condiţii suplimentare exterioare expresiei vom spune că expresia este *empiric* autologică.

Exemple. Termenii categoriali sînt în majoritate autologici. Astfel, termenul „obiect" este autologic deoarece luat *in suppositione materiali* este el însuşi *obiect*. Termenul „mulţime" este el însuşi o *mulţime* de semne. Cuvîntul „termen" este el însuşi un *termen*. Propoziţiile logicii sînt autologice. Astfel propoziţia „orice propoziţie este sau adevărată sau neadevărată; a treia posibilitate nu există" se referă şi la sine căci şi ea este o propoziţie. Termenii negativi sînt autologici. Fie, de exemplu, termenul „non-om". El desemnează o clasă complementară din care fac parte toate obiectele care nu sînt oameni, or printre aceste obiecte se află şi expresia *„non-om"*. Exemplele date aici sînt expresii *necesar autologice*. Iată şi exemple de expresii empiric autologice. Pe o foaie de hîrtie este scrisă o singură propoziţie „propoziţia scrisă pe această foaie de hîrtie este falsă". Se observă că expresia pusă în ghilimele este autologică numai în supoziţia că nu mai este scrisă şi o altă propoziţie pe această foaie de hîrtie. Propoziţiile autologice mai pot fi divizate în *contradictorii* şi *necontradictorii*. Cele contradictorii sînt la rîndul lor *simplu contradictorii* (ex. „Nici o propoziţie nu este adevărată") sau *paradoxale* (vezi exemple în cap. III). Logica expresiilor autologice nu a fost încă studiată — deşi importanţa ei este deosebit de mare. În cazul nostru, *teoria matematică* se confundă cu reflectarea ei, *meta-matematica*. „Această dificultate — spune Lorenzen — se rezolvă prin aceea că cuvintele „matematic" şi „matematică" nu se raportează la unul şi acelaşi lucru"[1].

---

[1] Ibidem.

Cu alte cuvinte, este necesar să restabilim sfera de aplicație a adjectivului „matematic" și a substantivului „matematică". Este lucru cunoscut că sfera adjectivului format de la un substantiv dat este întotdeauna cu mult mai largă. Prin analogie, vom spune că nu tot ce poartă calificativul de *matematic* este matematică, după cum nu tot ce poartă calificativul de *uman* este om (de exemplu, o *faptă umană* nu este ea însăși om).

Dacă substantivul S desemnează o sferă de obiecte α, atunci adjectivul $S\alpha$ derivat de la S va desemna tot ceea ce are *anumite* relații cu α. Sfera adjectivului este extrem de greu de precizat în principiu.

Să considerăm adjectivul „matematic". Acest adjectiv se aplică unor lucruri extrem de eterogene sub raportul naturii lor. Vom numi matematic un *raport obiectiv* (de exemplu raportul matematic dintre circumferință și diametru), o *judecată* (de exemplu $2 + 2 = 4$), un *termen* (de exemplu „logaritm"), o *calitate a gîndirii* (de exemplu „are o gîndire matematică") ș.a.

Toate acestea arată că trebuie să luăm ca un nou postulat următoarea afirmație:

V. Semnificația unui adjectiv $S\alpha$ derivat de la un substantiv S nu se reduce niciodată la semnificația acestui substantiv*.

Confuzia care se face între sfera substantivului și cea a adjectivului (derivat) izvorăște și din aceea că adjectivul poate fi aplicat (și chiar este aplicat) în primul rînd la sfera substantivului. O relație care ține de domeniul *matematicii* poate fi denumită, după cum am văzut, *matematică*. Este necesar deci să stabilim mai întîi sfera (domeniul de obiecte al) substantivului. În acest scop trebuie să admitem ca punct de plecare postulatul VI (în ordinea logică primul).

VI. Orice terminologie presupune existența unui domeniu de obiecte. Care este deci domeniul de obiecte la care s-a aplicat inițial termenul *matematică?* După părerea noastră, definiția clasică a matematicii, împărtășită unanim multe secole, este aceea pe care o redă Engels în *Anti-Dühring:* „Matematica pură are drept obiect formele spațiale și raporturile cantitative ale

---

* Postulatele stabilite mai sus ar putea fi încadrate într-o teorie generală a terminologiei, a cărei lipsă se simte deja.

lumii reale..."*. Avînd în vedere că geometria este prima și cea mai abstractă aplicație a raporturilor cantitative, noi putem să n-o includem în matematică. Acest lucru îl și face Engels în *Dialectica naturii*, unde dă următoarea definiție: „Matematica este știința mărimilor; ea pornește de la noțiunea de mărime"[1]. Așa cum arată Engels, matematica nu studiază raporturi cantitative concrete (de exemplu raportul dintre distanța București—Oradea și distanța București—Brașov), ci „raporturi în forma lor pură", „complet despărțite de conținutul lor"[2]. Tocmai de aceea este necesar să distingem între *matematică* și *aplicațiile ei* (așa cum se cere să deosebim oricare altă știință de aplicațiile ei, orice *general* de *particular* și *individual*).

Propoziția matematică (generală): „dacă $a \neq 0$ și $b \neq 0$, atunci $a \times b = c$ și $c \neq 0$" are o infinitate de aplicații, căci $a \times b = c$ poate să însemne astfel de raporturi *particulare* ca $2 \times 3 = 6$, $3 \times 4 = 12$ etc. sau astfel de raporturi ca „baza înmulțită cu înălțimea dă suprafața paralelogramelor" sau, „dacă fiecare băiat ia două mere, atunci trei băieți iau șase mere" etc. Vorbind despre natura raționamentului matematic (în lucrarea mai sus amintită), chiar Poincaré scria că „nu există știință decît a generalului"[3].

Toate raporturile particulare amintite sînt *matematice*, deși nu fac parte din *matematică* (căci matematica nu se ocupă de înmulțirea merelor). Aceste raporturi sînt *matematice* (deci li se aplică adjectivul *matematic*), în sensul că sînt cazuri particulare ale unor raporturi cantitative pure (formale), studiate de matematică, și nu în sensul că ele ar forma obiectul de studiu al

---

* Ce este „cantitatea", ce este „mărimea", ce sînt „raporturile cantitative"? Iată întrebări la care nu putem da răspunsuri „satisfăcătoare" din punct de vedere teoretic, așa cum dăm răspuns la „ce este triunghiul?". Și aceasta deoarece în definirea acestor categorii va interveni totdeauna o repetiție (un „cerc vicios"), cu alte cuvinte ele nu pot fi definite decît *nepredicativ*. Practic însă răspunsurile pot să fie satisfăcătoare. De exemplu, numesc *cantitate* a) ceea ce poate fi exprimat prin numere, b) ceea ce este măsurabil, c) ceea ce nu este calitate, d) lucrul la care aplică majoritatea oamenilor termenul „cantitate", e) mulțimea raporturilor care satisfac disjuncția „$a = b$ sau $a < b$ sau $a > b$".

[1] F. Engels. *Dialectica naturii*, București, Editura politică, 1966, ed. a III-a, p. 233.

[2] Idem, *Anti-Dühring*, p. 42.

[3] H. Poincaré. *La science et l'hypothèse*, Paris, ed. Flammarion, p. 13.

matematicii. Dacă toate cazurile particulare la care se aplică formulele cantitative pure ar forma obiectul de studiu al matematicii, atunci *matematica* ar fi cel puţin potenţial sinonimă cu *ştiinţa*, căci pretutindeni unde există materie există şi cantitate. Această generalizare a termenului de *matematică* nu ne-ar duce la nimic, căci noi tot ar trebui să distingem între $3 \times 2 = 6$: „3 băieţi care iau cîte două mere iau împreună şase mere". Asupra acestei distincţii atrage atenţia S. Körner în *Introducere în filozofia matematică* (vezi propoziţii care aparţin „matematicii pure" şi propoziţii care aparţin „matematicii aplicate", empirice). Deosebirea esenţială pe care o caută Körner între aceste propoziţii este dată de o tautologie a dialecticii: „genul se deosebeşte de speciile sale" (sau „particularul nu poate fi redus la general").

Se pune însă problema: includerea raporturilor matematice concrete în obiectul de studiu al matematicii ar anula diferenţa esenţială (dată în mod analitic) între *general* şi *particular* şi deci ar fi o generalizare arbitrară a conceptului de matematică; dar exclude aceasta posibilitatea altor generalizări?

Desigur că asemenea generalizări n-ar afecta cu nimic diferenţa de principiu care există între *raporturile cantitative pure* şi altfel de raporturi. Cu alte cuvinte, anularea oricărei diferenţe între termeni nu înseamnă anularea diferenţelor dintre domeniile (şi laturile) realităţii. *Noi putem identifica matematica cu ştiinţa în genere, dar prin aceasta n-am anulat diferenţa amintită*. Prin aceasta n-am făcut decît să încălcăm regulile terminologiei şi să încurcăm lucrurile.

Am făcut pînă acum o incursiune în problemele terminologiei. Va trebui în continuare să vedem care este natura metodologică a motivelor care au dus la extinderea termenului „matematică" dincolo de limitele sale clasice.

Materialismul dialectic distinge net între *forma cunoaşterii* (şi ceea ce ţine de această formă) şi *conţinutul obiectiv* al cunoaşterii (ceea ce formează obiectul cunoaşterii). Deoarece cunoaşterea este aceea care „reproduce" *(Marx)* sau modelează obiectul, este firesc ca noi să definim obiectul ei (şi, în consecinţă, adevărul ei) prin raport cu acest obiect; *este firesc deoarece orice*

cunoaştere se delimitează în mod natural prin raport cu obiectul pe care-l reproduce. Definiţia unei părţi a cunoaşterii (a unei ştiinţe) trebuie să înregistreze tocmai acea porţiune a realităţii (a obiectului) prin raport cu care s-a format cunoaşterea respectivă. Cu alte cuvinte, definiţia oricărei ştiinţe trebuie să plece de la obiect, să fie o definiţie „prin obiect". *Nici o altă definiţie, fie ea în raport cu limbajul, fie cu forma de organizare a ştiinţei sau cu procedeele folosite, nu poate lua locul definiţiei prin obiect.* Nu numai propoziţiile noastre diferă unele de altele după conţinutul obiectiv, dar întreaga cunoaştere este structurată în conformitate cu acest conţinut obiectiv. Să nu uităm însă că ştiinţa este o activitate (şi nu pur şi simplu rezultatul unei activităţi) şi, ca orice activitate, are un scop propriu: *trebuie să rezolve anumite probleme* (anumite sarcini). Ea trebuie să răspundă în permanenţă la anumite întrebări (are deci o finalitate): de ce natură sînt aceste întrebări? La ce tipuri de raporturi ne cer să ajungem? Prin aceasta revenim la obiect. De la obiect pornim prin activitatea practică şi de gîndire, la obiect revenim prin activitatea gîndirii şi a practicii. Cunoscînd anumite raporturi cantitative, ni se cere adesea să determinăm prin operaţiile de gîndire adecvate să stabilim alte raporturi. Matematica clasică ne cerea să rezolvăm probleme de natură cantitativă; ne cere matematica de azi altceva? A şters ea deosebirea între ceea ce pînă de curînd se numea „raport cantitativ" şi „raport necantitativ"? Evident că nu. Matematicienii care dau o extensiune dincolo de raporturile cantitative termenului „matematică" folosesc în mod tacit un alt principiu metodologic: *„ştiinţa trebuie definită nu prin obiect, ci prin metodă* (prin procedee). Însă metoda nu este decît expresia formei reflectării. A defini înseamnă a găsi unitatea obiectului definit. Definiţia prin metodă ar căuta baza unităţii cunoaşterii în cunoaştere (în gîndire), aşa cum a procedat, de exemplu, René Descartes. Materialismul dialectic a arătat însă ce dificultăţi apar atunci cînd cunoaşterea este apreciată exclusiv prin prisma cunoaşterii şi nu prin obiectul ei.

Cînd noi definim matematica prin „limbajul simbolic", „prin calcul", „prin formalizare", „prin recurenţă", „prin exac-

titate", „prin concepte funcţionale", „prin procedee (algoritmi), noi uităm că toate acestea s-au format prin raport cu un domeniu de obiecte dat, pornind de la relaţii de un anumit tip. *Toate cele de mai sus sînt mijloace pentru a reflecta*. Am denumit pînă acum domeniul de obiecte pe care-l cunoaştem domeniul relaţiilor cantitative, iar ştiinţa care reflectă acest domeniu matematică. La rîndul lor, mijloacele respective s-au numit prin derivaţie „matematice". *Iată că deodată am descoperit că mijloacele de mai sus sînt aplicabile dincolo de domeniul raporturilor cantitative*. A urmat din partea multora următorul raţionament: toate domeniile în care se aplică mijloacele aşa-zis *matematice* constituie ramuri ale matematicii, sînt matematică. Însă propoziţia că, *dacă două ştiinţe folosesc mijloace comune, ele au acelaşi domeniu de obiecte* n-a fost niciodată dovedită. În realitate, lucrurile pot să stea foarte bine în acest fel: anumite mijloace au apărut mai întîi într-o ştiinţă, ulterior ele s-au dovedit aplicabile şi în altă ştiinţă. După părerea noastră, actualul proces de extindere a mijloacelor folosite în matematică (nu trebuie să se confunde acestea cu aplicarea cunoştinţelor matematice la domenii particulare) arată numai faptul că *şi alte ştiinţe s-au copt pentru a permite utilizarea unor astfel de mijloace*. Noi putem continua să folosim în continuare termenul de „mijloace matematice" (în virtutea unei anumite stări istorice), însă aceasta nu va anula în nici un fel diferenţa dintre domenii ale raporturilor reale şi de aici diferenţa dintre diferite compartimente ale cunoaşterii. În exact acest fel stau lucrurile în raporturile dintre logică şi matematică. În scopul de a confirma încă o dată cele spuse mai sus vom da un lung pasaj din lucrarea lui Hilbert şi Ackermann *Bazele logicii teoretice*.

„*Logica teoretică*, denumită şi *logica matematică* sau *logica simbolică*, este aplicarea metodei formale a matematicii *la domeniul logicii* (subl. ns. — *Gh. E.*). Ea aplică la logică acelaşi *limbaj al formulelor* (subl. ns. — *Gh. E.*) care de mult se foloseşte pentru exprimarea relaţiilor matematice. În timpul de faţă ar fi o utopie să încercăm a rezolva problemele în construirea unei discipline matematice numai cu limba obişnuită. Marile succese obţinute în matematică, de exemplu în algebră, încă

din antichitate sînt condiționate într-o măsură însemnată de împrejurarea că s-a reușit aflarea unui formalism productiv și util. Ceea ce s-a reușit să se obțină datorită limbajului formulelor în matematică trebuie să se obțină cu ajutorul său și în logica teoretică, și anume tratarea științifică exactă a obiectului său. Legăturile logice care există între judecată, noțiuni etc. își găsesc expresia în formule a căror interpretare este scutită de neclarități, neclarități care pot să apară ușor prin exprimarea în cuvinte. Trecerea la concluzii logice, care se efectuează cu ajutorul raționamentelor, se descompune în ultimele sale elemente și se reprezintă ca o transformare formală a formulelor inițiale după reguli cunoscute, care sînt analogice cu regulile de calcul din algebră; gîndirea logică se reflectă în *calculul logic*. Acest calcul dă posibilitatea rezolvării cu succes a problemelor față de care gîndirea logică pur intuitivă este principial neputincioasă. La această serie aparține problema: cum putem caracteriza propozițiile care în genere pot fi obținute din premise date. O deosebită importanță a dobîndit calculul logic în ultimele decenii și pentru faptul că el s-a dezvoltat ca un mijloc ajutător necesar cercetărilor din fundamentele matematice"[1]. Această concepție redă atît de exact raportul dintre logică și matematică, încît tot ce am spus noi mai sus n-a făcut decît să expliciteze și să argumenteze cele spuse aici. Pentru cazul în care cineva ar afirma că logica matematică ar studia raționamente proprii gîndirii matematice (vezi R. L. Goodstein), noi vom răspunde că nu există asemenea raționamente pur matematice. Singurul raționament care părea pur matematic ar fi inducția matematică. H. Poincaré a arătat că aici nu este vorba însă decît de un silogism ipotetic-categoric (vezi lucrarea citată). Pe de altă parte, nici nu se poate spune că logica matematică ar avea aplicații numai în domeniul matematicii (vezi Heyting). Iată ce scrie în acest sens cunoscutul matematician român Gr. C. Moisil: „S-a adoptat de către unii filozofi (ar trebui spus și matematicieni. — *Gh. E.*) ideea că logica matematică, mai mult încă, logicile matematice

---

[1] D. Hilbert și W. Ackermann. *Grundzüge der theorethischen Logik*, Springer Verlag, Berlin (Göttingen) Heidelberg, 1949, p.1.

neclasice, ar fi constituite din « calcule logoide », care nu corespund de loc sau numai foarte puţin logicii tradiţionale. O astfel de separaţie poate fi dăunătoare logicii matematice, care astfel şi-ar mărgini domeniul la o « logică a ştiinţelor matematice ». Dar o anume «logică a imperativelor », care a început să fie studiată, nu şi-ar găsi locul printre cercetările privind structura logică a ştiinţelor matematice. De asemenea, logica modală, pînă astăzi cel puţin, nu-şi găseşte rostul ca o logică a disciplinelor matematice"[1]. Adăugăm la aceasta aplicarea logicii matematice la schemele cu relee şi cu contacte. Vorbind despre cea mai de seamă achiziţie a logicii moderne, logica relaţiilor, Gr. C. Moisil scrie: „Ceea ce constituie pentru cei ce lucrează în domeniul logicii un cîmp nou explorat este logica relaţiilor; studiul acestui capitol al logicii formale ar fi putut fi dezvoltat şi în stil clasic"[2].

Tot Gr. C. Moisil observă că „limbajul logicii simbolice, avînd toate acele caracteristici ale limbajului matematic care-l fac dezagreabil cititorului obişnuit, are în plus defectul de a fi deosebit de limbajul matematic şi, ca atare, rămîne neinteligibil la prima lectură chiar pentru matematicianul rutinat"[3].

Înainte de a trece la concluziile acestui capitol vom aminti încă studiul marelui matematician chinez Wang Hao, *Proces şi existenţă în matematică*[4] (în original *Process and existence in Mathematics*). Chiar din titlul acestui studiu, atenţia ne este atrasă asupra celor două probleme capitale ale matematicii contemporane: „procesul" şi „existenţa" în matematică. Iată principalele idei ale autorului.

1. Matematica este ştiinţa despre „relaţii şi structuri".

2. Reducţia ei la logică poate fi acceptată numai în sensul că matematica poate fi prezentată ca o colecţie de propoziţii condiţionale (definiţie „bibliotecărească", cum o numeşte Wang Hao). Această „reducţie" provine din „nevoi estetice" şi de „sistematizare".

---

[1] Gr. C. Moisil. *Încercări vechi şi noi de logică neclasică*, Bucureşti, Editura ştiinţifică, 1965, p. 421.
[2] Ibidem, p. 424.
[3] Ibidem, p. 74.
[4] Studiul se citează după culegerea *Matematiceskaia loghika i eio primenenia*, Moscova, 1965.

3. Wang Hao este, ca să spunem așa, un structuralist; el respinge atît formalismul, cît și platonismul. „Activitatea matematică se distinge nu prin producerea fizică de desene, ci prin posibilitatea de a le folosi în scopul experimentelor noastre mintale cînd căutăm cutare sau cutare legătură"[1].

4. Logica studiază procedeele de demonstrație. Ea poate fi formalizată și, ca urmare, aritmetizată (în sensul lui Gödel). „Aritmetizarea logicii include în sine schimbarea obiectului de cercetare, și anume trecerea de la raționamente despre clase, mulțimi ș.a.m.d. la raționamente despre modul în care raționăm"[2].

5. Existența matematică nu poate fi redusă, așa cum credea Hilbert, la noncontradicție.

6. „Problema existenței trebuie văzută în sensul realizabilității unei însușiri, relații, condiții, teorii, și anume: există oare vreun obiect sau sistem de obiecte cu structură adecvată care să satisfacă condiția dată?"[3]

Wang Hao lasă totuși deschise două probleme:

a) structurile de care se ocupă matematicianul sînt sau nu obiective?

b) care sînt relațiile dintre domeniile următoarelor definiții?

I. Matematica = știința despre raporturile cantitative;

II. Matematica = știința despre structuri;

III. Matematica = știința despre sistemele formale;

IV. Matematica = știința despre construcțiile intelectuale matematice.

Un cuvînt — „matematica" — și cel puțin patru semnificații! Ori de cîte ori folosește cineva acest cuvînt, întrebați-l: acesta este cuvîntul, dar definiția? A venit apoi matematicianul de rînd, obosit de atîtea discuții: „Nu mă privește cuvîntul « matematică »; el nu apare în calculele mele".

În concluzie, trebuie să spunem că cei care studiază raportul dintre logică și matematică rezolvîndu-l în favoarea ultimei presupun totdeauna (în mod tacit sau explicit) o anumită definiție a matematicii (definiția clasică), după care operează o

---

[1] Ibidem, p. 316.
[2] Ibidem, p. 328.
[3] Ibidem, p. 335.

extindere a termenului „matematică" în mod cu totul nefundat, ignorînd legile de dezvoltare a termenilor și postulatele metodologiei științifice. Ei confundă „matematica" cu „matematic", mijloacele de reflectare și de rezolvare a problemelor matematice cu obiectul de studiu al matematicii, matematica proces de reflectare (care cere din partea matematicianului să se intereseze de căile, de formele și de procedeele prin care poate fi atins obiectul existent independent de procesul gîndirii) cu domeniul realității raporturilor matematice independente de subiect. Matematica este astfel expresia raporturilor cantitative (ceea ce constituie partea din realitatea obiectivă studiată de ea) și activitatea subiectivă (procese care urmează o anumită cale, au o anumită formă, folosesc anumite procedee), care duce la exprimarea acestor raporturi. Matematicianul de azi nu definește obiectul unei teorii constituite, ci mai degrabă întreaga activitate, procesul științific care duce la reflectarea acestui obiect. În acest fel avem de-a face cu o *activitate matematică* și nu cu *obiectul către care tinde această activitate*. Definiția clasică dată de Engels nu a fost afectată în nici un fel, căci în cazul de față se vorbește despre lucruri diferite. Tendința aceasta de a înlocui definiția matematicii (prin obiect) cu definiția activității matematice și chiar a activității matematicianului (ca matematician) a dus în intuiționismul lui Brouwer și Heyting la ideea că matematica este doar „activitatea constructivă a gîndirii" și nu reflectarea unor raporturi independente de subiect. Fără acest domeniu de raporturi reale, unic și unitar, este în zadar să căutăm unitatea științei matematice pur și simplu în... concepte, metode etc. *Metodele, căile, formele, conceptele, propozițiile se unesc întrucît vizează un domeniu de raporturi unic, independent de ele și în genere independent de subiect.* În încheiere, aș vrea să mă opresc aici asupra unui studiu, de altfel interesant, cu privire la obiectul și conținutul matematicii, anume studiul lui A.D. Aleksandrov *Privire generală asupra matematicii*[1]. Autorul vorbește despre „extinderea obiectului matematicii dincolo de limitele formelor spațiale și ale relațiilor cantitative"[2].

---

[1] *Matematica, conținutul, metodele și importanța ei*, vol. I, București, Editura științifică, 1965, cap. I.
[2] Ibidem, p. 85.

A.D. Aleksandrov este un matematician cunoscut; el nu este însă şi logician, spre deosebire, de exemplu, de Hilbert, care era competent în cel mai înalt grad în ambele domenii. „Pe cuvînt" el nu poate fi crezut. În acest caz avem pur şi simplu opinia unui matematician nespecialist în logică (deşi cunoscător al ei). El nu ne spune în virtutea căror norme terminologice a procedat la extensiunea de mai sus, păşind într-un domeniu de raporturi despre care el însuşi spune: „Relaţiile dintre premise şi concluzie, dintre axiome şi teoreme nu se reduc însă, desigur, la forme spaţiale sau relaţii cantitative, pe scurt la relaţii între sferele logice ale noţiunilor"[1]. Prin ce minune formele de reflectare (formele gîndirii) sînt introduse alături de raporturile cantitative, constituind un domeniu comun al matematicii, din moment ce ele nu sînt reductibile unele la altele? Cum mai poate fi aflată unitatea lor concretă? Prin ce minune *teoria* este identificată cu *obiectul teoriei*? Afirmînd că „obiectul ei (al logicii matematice) îl constituie structura deducţiilor matematice..."[2], ceea ce este o limitare falsă, aşa cum s-a arătat mai sus, autorul nu arată cum pot fi absorbite aceste raporturi de cele cantitative. El nu face decît să preia o opinie perimată, care, dacă n-ar avea consecinţe metodologice (şi în genere filozofice) nefaste, puţin ne-ar privi. El crede, ca urmare, că trebuie să renunţăm la definiţia clasică a matematicii (vezi Engels) sau, mai precis, s-o completăm. După părerea noastră, „completarea" pe care o dă A.D. Aleksandrov încurcă foarte mult lucrurile. „Obiectul matematicii este constituit din acele forme şi relaţii ale realităţii care posedă obiectiv un grad de indiferenţă faţă de conţinut, îndestulător pentru a putea fi total abstrase de la acestea şi definite într-o formă generală cu atîta claritate şi precizie şi păstrînd o atare bogăţie de conexiuni, încît să servească drept fundament pentru o dezvoltare pur logică a teoriei"[3]. Iată-ne reveniţi la „claritate", „precizie", „grad îndestulător de indiferenţă faţă de conţinut", concepte care fac definiţia extrem de nebuloasă şi ne aruncă cu cîteva sute de ani

---

[1] Ibidem.
[2] Ibidem.
[3] Ibidem, p. 86.

înapoi la... Descartes. Această definiție este destinată să îngrămădească sub un termen un conținut extrem de neunitar, de eterogen. Singura reducție care ar fi dovedit identitatea obiectului celor două științe ar fi fost deducția propozițiilor unei științe din propozițiile alteia. Oricît am avansa cu o asemenea reducție deductivă, ea are o limită, așa cum a arătat eșecul logicismului. Dacă, totuși, putem în abstract spera la unificarea domeniului logicii și matematicii pe baza logicii prin descoperirea legăturii interne a conceptelor celor două științe (adică prin deducerea conceptelor matematice din concepte mai simple logice), nu avem nici o speranță să unificăm cele două științe în mod deductiv plecînd de la matematică (căci nu putem deduce raporturile logice din cele cantitative). Datorită imposibilității de a unifica cele două științe prin descoperirea legăturii intrinsece între conceptele lor (singura cale de a demonstra unificarea), s-a apelat la criterii exterioare, care nu sînt, totuși, decît superflue.

Există în momentul de față o știință unitară a logicii, care nu poate nici să înglobeze matematica, nici să fie înglobată în matematică. Ea se poate servi, ca și alte științe, de metode aplicate pînă acum în matematică, după cum poate prea bine să ajute matematicii, ca și altor științe, în rezolvarea problemelor lor specifice, și în primul rînd în construcția teoriilor matematice deductive.

Și, în sfîrșit, trebuie să se aibă în vedere că *unitatea obiectului științei se dezvăluie în legătura internă dintre conceptele teoriei*. Dacă un program logicist ar fi avut măcar aparent unele șanse de reușită din acest punct de vedere, un program matematist este exclus din principiu.

Capitolul al II-lea

Funcţii şi legi logice

1. ORIGINEA FUNCȚIILOR LOGICE

Dacă punctul de sosire al logicii moderne sînt legile logice, ca și în cazul logicii tradiționale, punctul ei de plecare este funcția și nu conceptul. Însă Frege, cel care a introdus conceptul de funcție în logică, a identificat funcția propozițională cu conceptul. Astfel, $\Phi(\xi)$ este un concept dacă prin înlocuirea lui „ξ" cu o valoare determinată se obține o expresie, care este adevărată sau falsă.

Cum să înțelegem această idee a lui Frege? Să considerăm conceptul *om*. Expresia care fixează acest concept în mod prescurtat, adică „om", poate fi parafrazată astfel: „ceea ce este om", adică *omul* este *ceea ce este om* (propoziție adevărată prin principiul identității). Conceptul este tratat în acest caz ca expresie a unei proprietăți a unor obiecte *de a fi oameni*. În acest caz, expresia „ceea ce este om" poate fi ușor tradusă prin „x care este om". Or, „x care este om", deși nu afirmă ceva, implică afirmația „x este om", ceea ce este o funcție care, prin înlocuirea lui x cu nume de indivizi reali, poate deveni adevărată sau falsă. Funcția reprezentată de „x este om" poate fi scrisă și astfel: $Om(x)$, o expresie de forma $\Phi(\xi)$. În acest fel, Frege dă un corespondent logic-simbolic *noțiunii* din logica generală. Numai că acest corespondent nu are nici pe departe complexitatea ideii de *noțiune*.

Ce este funcția logică și cum a apărut ea? Dat fiind faptul că acest concept a fost transferat (cu modificările necesare) din matematică în logică, socotim util să reamintim cititorului unele lucruri generale cu privire la conceptul de funcție. „În cel mai general sens, funcția (univocă) f sau $f(x)$ sau $y = f(x)$ de o variabilă x este o corespondență în virtutea căreia oricărui element x al unei mulțimi X i se asociază un singur element y al unei mulțimi Y"[1]. Ideea de a defini funcția prin relația de

[1] S. C. Kleene. *Op. cit.*, p. 32.

corespondență îi aparține lui Dirichlet. În expresia „$y = f(x)$", x este variabila independentă, iar y este variabila funcțională. Funcția este deci corespondența care se stabilește între valorile lui x și valorile lui y. Variabila independentă se mai numește și „argumentul funcției". Mulțimea X de elemente poartă numele de „domeniul de valori ale lui x", „domeniul de schimbare al variabilei independente", „domeniul de definire al funcției" sau „domeniul de existență al funcției". Termenul de „valoare" este sinonim cu termenul de „semnificație".

În legătură cu argumentul funcției se introduce definiția: numim *domeniu de existență al funcției* (vezi și celelalte denumiri) totalitatea valorilor admise ale argumentului său. Mulțimea Y va purta numele de „domeniu de valori al variabilei funcționale" sau „domeniul de valori al funcției" sau „codomeniul funcției". Pentru a nota diferitele funcții folosim expresii ca $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ (în caz că ele au același argument) sau $f(x), f(z), \ldots$ (cazul în care avem argumente diferite). Funcția notată prin $y = f(x)$ este o funcție singulară (monadică), adică o funcție cu un singur argument. Pot exista însă și funcții cu n argumente, adică funcții n-adice, pe care le vom nota cu $y = f(x, z, \ldots, t)$. De asemenea pot exista și funcții care au ca argument altă funcție.

Kleene notează următoarele echivocuri care apar în terminologia funcțiilor. Termenul de „argument" este folosit adesea în două înțelesuri: ca *valoare a lui x* sau ca *variabilă independentă*. Termenul de „funcție" are trei înțelesuri: *corespondență univocă* (de exemplu se spune că „$y = f(x)$" reprezintă o funcție), variabila y, sau chiar expresia funcțională „$y = f(x)$". Expresia „$f(x)$" are două înțelesuri: însăși *funcția* și *semnificația generală* a lui y. De exemplu, în expresia „$x + y$ este simetrică", „$x + y$" desemnează funcția, iar în expresia „suma $x + y$ a două numere naturale x, y trebuie să fie $\geqslant x$", „$x + y$" desemnează valoarea generală a funcției. Această utilizare polisemantică a termenilor de mai sus este atît de răspîndită în matematică, încît este greu să-și asume cineva sarcina de a face ordine în acest sens. Deprinderea s-a transmis și logicienilor. În orice caz, noi am vrea să atragem atenția îndeosebi

asupra diferenţei între *a vorbi despre funcţie* şi a vorbi despre *expresia (forma scrisă) a funcţiei.*

Funcţiile pot fi definite („date") prin mai multe metode: metoda analitică (funcţia este dată printr-o ecuaţie, de exemplu $s = v.t$ în fizică), metoda matriceală (tabelară), metoda graficului, metoda parametrică pentru definirea funcţiilor de un singur argument şi metoda variaţiilor concomitente. Metoda parametrică constă în următoarele: se dau două ecuaţii independente care exprimă pe x şi y cu ajutorul unei a treia variabile („parametru") t:

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t).$$

Dînd valori arbitrare lui t, obţinem pentru x şi y perechi de valori corespunzătoare între ele. Dacă din acest sistem putem să-l eliminăm pe t, se obţine o singură ecuaţie de legătură între x şi y, ceea ce revine la metoda analitică. Pe baza celor de mai sus, vom introduce noţiunea de *funcţie logică*.

Numim funcţie logică o asemenea funcţie al cărei domeniu este o mulţime de obiecte oarecare *(se specifică de fiecare dată care anume mulţime), iar codomeniul este constituit numai din valori logice (adevăr, fals etc.)*. Se studiază două tipuri de funcţii logice: „funcţii de adevăr" şi „funcţii propoziţionale". Funcţiile de adevăr au ca domeniu de valori numai valori logice, funcţiile propoziţionale nu au ca domeniu de valori valori logice (uneori însă termenul de „funcţie proporţională" se utilizează în aceeaşi extensiune ca şi termenul de „funcţie logică").

Dacă geneza funcţiilor propoziţionale este oarecum clară, nu acelaşi lucru se poate spune despre funcţiile de adevăr. Vom considera mulţimea propoziţiilor caracterizată prin aceea că fiecare propoziţie este sau adevărată sau falsă, a treia posibilitate fiind exclusă. Fiecare propoziţie poate fi caracterizată printr-o formă gramaticală, un sens concret, o structură logică, o valoare de adevăr şi o valoare metodologică. De asemenea propoziţiile pot fi elementare sau compuse*. Funcţiile de ade-

---

* Noţiunea de elementar o definim astfel: *spunem că un obiect* x *este elementar prin raport cu o proprietate* P *dacă şi numai dacă* x *are proprietatea* P *şi nici o parte a lui* x *nu mai are această proprietate.* În consecinţă, această propoziţie este elementară dacă nici o parte a ei nu mai este propoziţie.

văr se construiesc pornind de la această mulţime de propoziţii. Fiindcă cel mai mult discutată este *implicaţia materială*, vom încerca să explicăm geneza acestei funcţii, după care vom generaliza metoda pentru alte funcţii.

Reamintim definiţia (matriceală) a conceptului de implicaţie materială:

Tab. 1

p, q	$p \to q$
$v\ v$	v
$v\ f$	f
$f\ v$	v
$f\ f$	v

Aceasta arată că valoarea de adevăr a implicaţiei este o funcţie de valorile argumentelor. Ceea ce stîrneşte uneori nedumerire sînt implicaţiile de la fals la adevăr şi de la fals la fals ($f \to v, f \to f$). Mai ales implicaţia „$f \to v$" a apărut ca un paradox. Algoritmiştii dau de obicei astfel de explicaţii: introducerea acestui concept este justificată prin faptul că nu duce la contradicţii sau expresia „$p \to q$" este o simplă prescurtare pentru $\bar{p} \vee q$.

Uneori s-a văzut în acest concept expresia unei relaţii existenţiale (condiţionare, cauzalitate) sau cel puţin o abstracţie realizată pe baza unor asemenea relaţii.

Astfel, implicaţia „$f \to v$" ar trebui interpretată ca „absenţa lui *a* condiţionează (cauzează) prezenţa lui *b*", iar implicaţia „$f \to f$" trebuie interpretată ca „absenţa lui *a* condiţionează (cauzează) absenţa lui *b*". Totuşi, o relaţie de condiţionare sau cauzală presupune prezenţa ambilor termeni aflaţi în relaţie, căci nu se poate spune că ceea ce nu există (ceea ce este absent) poate condiţiona ceea ce există (este prezent) sau că ceea ce este absent condiţionează ceva absent. Pe de altă parte, implicaţia falsă „$v \to f$" poate fi concepută ca adevărată în sensul că „prezenţa lui *a* este cauza care face imposibilă prezenţa lui *b*" şi deci, contrar matricei de mai sus, ea poate

fi adevărată în această interpretare[1]. Între altele, s-a încercat următoarea interpretare în sens cauzal. Semnul *v* va desemna *prezenţa cauzei* şi, respectiv, *prezenţa efectului*, iar *f absenţa cauzei* şi, respectiv, a *efectului*. Cele patru situaţii din matrice ar însemna:

1) dacă este cauza, este şi efectul;

2) dacă este cauza, nu poate să nu fie efectul;

3) dacă nu este cauza, poate fi efectul;

4) dacă nu este cauza, nu este efectul.

Cazurile 1), 2), 4) sînt tautologii şi deci nu pot fi respinse. Cazul 3) însă nu este adevărat şi iată de ce. În presupunerea că *a* este cauza considerată şi *b* efectul ei, dacă această cauză *a* la care ne raportăm este absentă, efectul *b* poate să fie sau să nu fie. Dacă este, el este în virtutea altei cauze (în cazul în care acceptăm multiplicitatea cauzelor unui efect) şi deci nu mai avem o relaţie între *a* şi *b*, ci între *c* (să zicem) şi *b*. Aşadar, cazul 3) va fi: dacă nu este cauza *a*, probabil *b* va exista în virtutea unei cauze *c*, ceea ce, evident, nu poate fi asimilat cazului „$f \rightarrow v$", căci nu absenţa lui *a* determină prezenţa lui *b*, ci *b* este determinat de prezenţa lui *c* (un al treilea termen). Toate cercetările duc deci la concluzia că nu există o propoziţie ontologică de determinare asimilabilă cu implicaţia materială*. Ne rămîne să căutăm punctul de plecare în gîndire, ceea ce este pe deplin firesc, logica fiind ştiinţa

---

[1] Vezi în acest sens studiul nostru din „Acta logica", 1963, nr. 6.

* Florea Ţuţugan a propus o anumită interpretare ontologică a logicii bivalente. În locul valorilor *v*, *f* el introduce situaţiile ontologice „prezenţă" şi „absenţă". Să notăm prezenţa cu „da" şi absenţa cu „nu". Vom defini funcţiile în felul următor:

p \ q	da	nu
da	da	nu
nu	nu	nu

Conjuncţie

p \ q	da	nu
da	da	da
nu	da	nu

Disjuncţie

p	$\overline{p}$
da	nu
nu	da

Negaţie

Implicaţia materială ar putea fi introdusă în acest caz ca o simplă prescurtare.

despre legi ale gîndirii. Aceasta nu înseamnă nicidecum că logica modernă nu mai are nici o legătură cu ontologia, că ea ar fi „liberă de ontologie" (Carnap), ci că, așa cum vom mai vedea, ea *nu este reductibilă la ontologie*.

În afară de relațiile de determinare, legătura „dacă... atunci..." poate exprima o deducție (o relație ipotetică-deductivă), pe care convenim s-o notăm, în genere, prin $A \vdash B$, unde A este mulțimea premiselor, B concluzia, iar semnul „$\vdash$": „din... se deduce..." sau „dacă... atunci"...; altfel spus, „$A \vdash B$" reprezintă o schemă de deducție a cărei condiție unică este (așa cum am mai arătat) următoarea: *ori de cîte ori este adevărat A, este adevărat și B*. Prin definiție, această condiție implică: a) schema de raționare nu duce niciodată de la adevăr la fals; b) dacă se pornește de la fals, nu se poate spune în general la care dintre cele două cazuri se va ajunge (aceasta depinde de materia raționamentului și, *poate*, de unele condiții mai tari impuse schemei). Să considerăm următoarea schemă corectă (adică o schemă ce satisface condiția indicată mai sus). Dacă toți B sînt C și toți A sînt B, atunci toți A sînt C, ceea ce nu este decît așa-numitul mod *Barbara*. Schema de mai sus poate fi redată și sub formă categorică:

$$\begin{array}{c} TB - C \\ \underline{TA - B} \\ TA - C \end{array}$$

Această schemă (regulă) are un sens propriu pe care nu-l are nici o altă schemă (de exemplu *Celarent*): din propoziții de o anumită formă se deduce o propoziție de forma indicată. Aceasta este sensul sau „descrierea intenției" (intenție = ceea ce vrea să comunice propoziția) regulii a cărei formă gramaticală este o propoziție condițională (compusă din alte propoziții). În afară de descrierea intenției și a structurii gramaticale, schema de mai sus acceptă și o descriere logică: este vorba de o judecată ipotetică-deductivă. De asemenea ea mai poate fi caracterizată sub raportul valorii logice și a valorii de întrebuințare (metodologic). În mod deosebit ne interesează aici situația valoric-logică a acestei propoziții. Am arătat că, dacă

regula de raţionare este adevărată (corectă), atunci din aceasta decurg următoarele concluzii:

a) dacă premisele sînt adevărate, atunci concluzia este adevărată;

b) dacă premisele sînt adevărate, concluzia nu poate fi falsă;

c) dacă premisele sînt false, nu decurge nimic cu necesitate pentru concluzie.

*Valoarea regulii (de deducţie) corecte este deci compatibilă numai cu o anumită distribuţie a valorilor componentelor (premise, concluzie)**. Vom da această distribuţie în tabelul de mai jos:

Tab. 2

$A \vdash B$	A,	B
v	*v*	*v*
	f	*v*
	f	*f*
f	*v*	*f*

Cititorul poate avea o imagine intuitivă asupra acestei situaţii dacă vom apela la exemple pentru schema dată mai sus (Barbara).

Ex. 1 Cazul $A = v$, $B = v$:

v { Toţi oamenii sînt muritori
Regii sînt oameni

v { Regii sînt muritori

Ex. 2 Cazul $A = v$, $B = f$:

v { Toţi oamenii sînt muritori
Regii sînt oameni

f { Regii sînt nemuritori

Se observă că propoziţia „regii sînt nemuritori" este falsă şi nu decurge din premisele date, care sînt adevărate. Deducţia este în acest caz falsă.

* Cu privire la aceste probleme, vezi şi C. I. Lewis şi C. H. Langford. *Symbolic Logic*, New York, Dover Publications, ed. a 2-a, 1959.

Ex. 3 Cazul $A = f$, $B = v$:

f { Toate plantele sînt mamifere
Toate ovinele sînt plante

v { Toate ovinele sînt mamifere

Deşi premisele sînt false şi concluzia adevărată, deducţia este corectă (validă), adică nu au fost încălcate nici una dintre regulile de deducţie.

Ex. 4 Cazul $A = f$, $B = f$:

f { Toţi oamenii sînt trestii gînditoare
Toţi pinguinii sînt oameni

f { Toţi pinguinii sînt trestii gînditoare

Cu toate că atît premisele, cît şi concluzia sînt false, regula de deducţie Barbara nu a fost încălcată. Deducţia este în acest caz adevărată.

Din cele de mai sus decurge că prin aplicarea schemei corecte de raţionare la cazuri concrete se obţine următoarea situaţie, pe care o prezentăm într-un tabel.

Fie *a*, *b* premise, *c* concluzia, $(a, b) \vdash c$ afirmaţia că „din *a* şi *b* se deduce *c* conform cu regula Barbara". Vom avea:

Tab. 3

a, *b*		$(a, b) \vdash c$
v	*v*	*v*
v	*f*	*f*
f	*v*	*v*
f	*f*	*v*

Orice propoziţie ipotetică-deductivă care este o aplicaţie a unei reguli de deducţie concretă cade într-una şi numai într-una din cele patru situaţii descrise în tabel, iar regula corectă de deducţie este caracterizată prin aceea că, aplicată la cazuri concrete, admite cel mult aceste patru situaţii diferite. Identitatea tabelului de mai sus cu matricea implicaţiei este evidentă. Cu toate acestea, implicaţia materială nu poate fi confundată cu nici una dintre schemele de deducţie şi cu atît mai puţin cu aplicaţii concrete ale acestor scheme. Intenţia unei funcţii de adevăr este următoarea: valoarea de adevăr

a expresiei compuse depinde (este funcție) de valoarea de adevăr a componentelor sale. *Or, acest lucru nu se poate afirma despre nici un raționament concret și nici despre regulile de raționare.* Nu este suficient în nici un caz ca premisele și concluzia să aibă anumite valori pentru ca deducția să aibă automat o anumită valoare.

Nici schemele de raționare și nici raționamentele concrete nu sînt funcții de adevăr. Pe de altă parte, nu se poate contesta o anumită legătură între regulile de deducție și implicația materială: regula de deducție este caracterizată de aceleași corespondențe de valori ca și implicația materială. Însă diferența esențială apare în două puncte:

a) raționamentele concrete nu pot fi caracterizate numai prin corespondențele univoce între mulțimi de valori;

b) situația valorică a unui raționament concret depinde și de informația propozițiilor.

Ceea ce ne oferă studiul raționamentelor concrete este un șir de patru corespondențe:

$$\{v, v\} - \{v\}$$
$$\{v, f\} - \{f\}$$
$$\{f, v\} - \{v\}$$
$$\{f, f\} - \{v\}$$

Cum se ajunge de aici la funcția de adevăr? Se poate ajunge printr-un gen de abstractizare, care în logica modernă poartă numele de *idealizare*. Procesul de idealizare implică totdeauna introducerea unor supoziții care la nivelul obiectului de la care plecăm sînt false. Astfel, în cazul de față *considerăm aceste corespondențe ca fiind de sine stătătoare (nu depind de altceva)*. Tratăm deducția *ca și cînd* ar depinde numai de valorile propozițiilor componente. În acest fel se obține funcția implicativă. Ținînd seama de cele spuse mai sus, expresia „$p \rightarrow q$" poate fi interpretată în felul următor: „p" desemnează premisele, „q" concluzia, iar „$p \rightarrow q$" relația de deducție („din premisele p se deduce concluzia q"). *Trecerea de la funcția de adevăr la raționamentele concrete se efectuează eliminînd supoziția indicată și reintegrînd toate proprietățile de care s-a făcut*

abstracţie. Să rezumăm acum drumul pe care l-am parcurs pentru a ajunge la funcţia de adevăr:

1) am considerat mulţimea propoziţiilor concrete (în caz special al propoziţiilor ipotetice-deductive);

2) am dat o descriere intenţională (informaţională) acestor propoziţii;

3) am abstras structura logică ca rezultat al descrierii tipului de informaţie (intenţie) pe care sînt capabile propoziţiile s-o comunice;

4) în funcţie de tipul de informaţie, am descris sub raportul valorilor logice propoziţia, obţinînd un şir de corespondenţe caracteristice (structura valorică);

5) pe baza acestor corespondenţe, prin idealizare am introdus funcţia.

În procesul de mai sus apare şi o altă idealizare: valorile de adevăr (v, f) sînt luate ca obiecte de sine stătătoare („obiecte abstracte"). Fiecare pas în analiza propoziţiilor concrete ne-a dezvăluit o latură importantă: ***structura logică*** şi ***structura valorică***. Am obţinut, corespunzător, două rezultate importante: regulile de raţionare prin simplă abstractizare şi funcţia de adevăr prin idealizare. Este necesar să subliniem diferenţa de nivel de abstracţie între următoarele trei concepte: *raţionamentul concret*, *schema de raţionare* şi *funcţia de adevăr*. În caz particular deosebim:

1) dacă oamenii sînt muritori şi regii sînt oameni, atunci regii sînt muritori (raţionamentul concret);

2) dacă B este C şi A este B, atunci A este C;

3) dacă p, atunci q (implicaţia materială). Trecerea de la 1) la 2) şi 3) se face, după cum am mai spus, prin *abstractizare* (= neglijarea unor însuşiri şi reţinerea altora) şi, respectiv prin *idealizare* (tratarea abstracţiei ca pe un obiect de sine stătător). Orice confundare a acestor nivele de abstracţie duce la ceea ce s-a numit „paradoxele implicaţiei materiale", căci la nivelul propoziţiei concrete, (deci a obiectului concret supus discuţiei (propoziţia ca fenomen al gîndirii este un obiect concret), supoziţiile funcţiei de adevăr (implicaţia) se dovedesc

a fi false. O astfel de confuzie face și Rudolf Carnap cînd scrie: „Adevărul propozițiilor compuse nu depinde de sensul propozițiilor *p* și *q*, ci numai de valoarea lor de adevăr"[1]. Adevărul și falsul sînt proprietăți ale informației pe care o transmite propoziția, și a rupe adevărul de substratul său (informația) înseamnă a transforma propozițiile în ceva ce nu au nici o legătură cu realitatea. Nu „propozițiile compuse" sînt acelea care fac abstracție de informație (sens), ci funcția corespunzătoare, care este o idealizare introdusă pe baza analizei raporturilor de valoare ale propoziției compuse. Paradoxele implicației materiale sînt rezultatul identificării obiectului abstract cu obiectul concret. *Ele pot fi eliminate prin cercetarea procesului de formare a obiectului abstract și, ca urmare, prin restabilirea diferenței dintre abstract și concret. Cu alte cuvinte, obiectul abstract poate fi înțeles pe deplin numai prin urmărirea genezei lui, deci prin aplicarea metodei genetice* (metodă dialectică). Asupra acestui lucru au stăruit Hegel, Marx și Engels (numai urmărind procesul de formare al abstracției „măr" putem înțelege pe deplin această abstracție; vezi *Ideologia germană)*. Nu numai implicația materială, dar și alte funcții de adevăr pot apărea ca paradoxale dacă sînt confundate cu propozițiile concrete corespunzătoare. Metoda de explicare este asemănătoare cu cea aplicată mai sus. Și acum cîteva observații istorice și critice.

Cel care a definit propoziția „condițională" numai în termeni de adevăr a fost Filon. El spunea că propoziția condițională este totdeauna adevărată, cu excepția cazului în care antecedentul este adevărat și consecventul fals. Filon, ce-i drept, n-a deosebit între propoziția compusă și funcția implicativă. El nu și-a dat seama de faptul că prin caracterizarea propoziției condiționale prin valorile logice noi nu epuizăm conținutul acestor propoziții. El nu și-a dat seama, probabil, nici de diferența dintre propozițiile implicative existențiale și cele deductive, deși se vede clar că exemplele alese de el sînt propoziții deductive, și se știe că el vorbește despre legăturile dintre propoziții.

---

[1] R. Carnap. *L'Ancienne et la nouvelle logique*, Paris. 1933, p. 27.

Iată aceste exemple și caracterizările valorice corespunzătoare.

1) dacă este ziuă, atunci este lumină (v v/v);

2) dacă este ziuă, atunci este noapte (v f/f);

3) dacă Pămîntul zboară, el există (f v/v);

4) dacă Pămîntul zboară, el are aripi (f f/v).

În aceste exemple relația *dacă... atunci* nu poate sta între stări de fapt, deoarece ea nu îndeplinește condiția impusă de implicația existențială. Într-adevăr, faptul că *este ziuă* nu poate determina faptul că *este lumină* (1), faptul că *este ziuă* nu poate determina faptul că *este noapte* (2), ideea că *Pămîntul zboară* din cazurile 3) și 4) nu poate fi aplicată la realitate, deoarece este contradictorie. Dimpotrivă, în înțeles deductiv, propozițiile 1) — 4) sînt pe deplin firești. Iată cum.

Conceptul *ziuă* se definește prin conceptul de *lumină* și deci din afirmarea „zilei" decurge analitic (prin definiție) sau tautologic afirmarea „luminii". Conceptul de *ziuă* respinge prin definiție conceptul de *noapte* și deci *nu se poate deduce* din afirmarea unuia afirmarea celuilalt. Ideea că *Pămîntul zboară*, deci ideea că Pămîntul ar avea determinarea *zboară*, cuprinde analitic (tautologic prin definiție) ideea că Pămîntul există, aceasta în virtutea principiului după care *orice determinare cuprinde în sine existența*. O dată ce am trecut la afirmarea determinării, am trecut și la afirmarea existenței. Ideea că *Pămîntul zboară* (zborul este aici înțeles în sensul de „zbor asemănător zborului păsărelelor") cuprinde în sine, prin definiție, *existența aripilor* și deci afirmarea uneia implică afirmarea celeilalte. După cîte vedem, exemplele lui Filon sînt, de fapt, „propoziții analitice" (sau tautologice). Filon, deși introduce, prin definiția dată propoziției condiționale, implicația materială, nici el și nici alții din antichitate nu au avut conștiința conceptului de funcție implicativă și, în general, de funcție de adevăr. Funcțiile logice, ca și funcțiile în genere (matematică în particular), sînt descoperiri ale epocii moderne și contemporane. În epoca contemporană, cînd au și fost introduse funcțiile de adevăr, implicația materială a stîrnit multe nedumeriri. Cauzele acestor nedumeriri rezidă, pe de o parte, în dificulta-

tea de a înţelege fără o tratare genetică (dialectică) a obiectului abstract, iar pe de altă parte într-o serie de confuzii semănate de unii logicieni de vază.

Analiza necesară am efectuat-o mai sus. Să discutăm despre a doua cauză. Încercînd să exemplifice implicaţia materială, Hilbert şi Tarski dau exemple de felul acesta: dacă „2×2=4", atunci „zăpada este albă" *(Hilbert)*; dacă „2×2=4", atunci „New York este oraş mare" *(Tarski)*. Aceste exemple însă cuprind anumite „paradoxe", care provin din faptul că implicaţia materială este exemplificată într-un domeniu nepotrivit cu originea ei. Pentru a exemplifica trebuie să revenim la domeniul propoziţiilor deductive de unde a fost abstrasă implicaţia materială şi nu pur şi simplu să substituim propoziţii adevărate sau false variabilelor respective. Într-adevăr, cînd apelăm la propoziţii concrete, „dacă... atunci" poate să desemneze sau o relaţie de determinare ontologică (existenţială), sau o deducţie. Prin originea sa însă, implicaţia materială este legată de relaţia de deducţie. Dar *nu avem nici o metodă de a deduce din propoziţia „2×2=4" propoziţia „zăpada este albă"*.

În cartea sa *Ce este logica matematică,* inginerul sovietic L.A. Kalujnin se ocupă şi el de problema raportului dintre implicaţia materială şi propoziţiile deductive (pe care el le numeşte „consecvenţe logice"): „Vrem să subliniem încă o dată că enunţul «*a*→*b*» nu coincide ca sens cu enunţul «dacă *a*, atunci *b*» („consecvenţa logică". — *Gh. E*). De aceea, pentru evitarea nedumeririlor este mai potrivit să se citească «*a*→*b*», nu «dacă *a*, atunci *b*», ci «*a* implică *b*», şi să înţelegem aceasta exact aşa cum se stabileşte prin matricea de adevăr"[1]. Această problemă a fost abordată exhaustiv de către noi în teza de doctorat (Moscova, 1962) şi în studiul amintit mai sus (1963)*.

---

[1] L. A. Kalujnin. *Cito takoe matematiceskaia loghika*, Moscova, 1964, p. 17.

* Nu ne-am propus aici să analizăm exhaustiv problema implicaţiei. Notăm că există multe tipuri de relaţii implicative: 1) implicaţia cauzală (în care se cuprinde o relaţie de la cauză la efect); 2) implicaţia condiţională (relaţie de la condiţie la condiţionat); aceasta este de mai multe feluri: a) exclusivă („numai dacă *a* atunci *b*"), b) de condiţie *sine qua non* („numai dacă şi *a* atunci *b*"), c) de condiţie suficientă („dacă *a* atunci *b*"); 3) implicaţia formală („pentru orice *x*, dacă *Px*, atunci *Qx*"); 4) implicaţia logică („*q* se deduce din *p* în virtutea legilor logice cutare şi cutare"); 5) implicaţia deductivă (schemele logice de deducţie);

2. CONCEPTUL DE FUNCŢIE PROPOZIŢIONALĂ

Prin definiţie, aşa cum am arătat, funcţia este o corespondenţă univocă, însă în cazul de faţă termenul de „funcţie propoziţională" se foloseşte cu precădere în scopul desemnării expresiei funcţionale. Vom continua şi noi această tradiţie. În consecinţă, este necesar să introducem o definiţie adecvată acestei utilizări speciale a termenului.

Vom numi *funcţie propoziţională* o expresie care îndeplineşte următoarele condiţii:

a) conţine o parte variabilă şi una determinată (şi nu este deci nici adevărată, nici falsă);

b) prin substituirea cu anumite expresii determinate sau prin cuantificarea părţii variabile se obţine o propoziţie adevărată sau falsă. Astfel, expresia „x este alb" este o funcţie propoziţională. Dacă în locul lui „x" punem expresia „zăpada", obţinem propoziţia adevărată „zăpada este albă", iar dacă în locul lui „x" punem expresia „cărbune", atunci obţinem propoziţia falsă „cărbunele este alb". De asemenea, prin cuantificare obţinem propoziţia falsă $\forall x$ (x este alb) şi propoziţia adevărată $\exists x$ (x este alb).

Între substituţie şi cuantificare există o strînsă legătură, căci, în definitiv, „pentru orice x, x este alb" înseamnă acelaşi lucru cu „pentru orice valoare substituită lui x, x este alb" (se înţelege că este vorba de valorile admisibile ale lui x, adică de acelea care fac parte din *universul discursului lui x*), iar „există x, astfel că x este alb" înseamnă „există valori ale lui x pentru care x este alb". Ca un caz particular al funcţiilor propoziţionale pot fi considerate şi funcţiile de adevăr. Ele pot fi supuse de asemenea cuantificării. De exemplu, $p \vee p$ devine $\forall p$ ($p \vee p$). Deoarece raportul dintre expresie şi mulţimea valorilor pe care ea le poate lua este un raport *semantic*, iar forma pe care o ia expresia (cuantificată sau necuantificată)

---

6) implicaţia strictă a lui Lewis („este imposibil să fie p şi să nu fie q"); 7) implicaţia materială (funcţie de adevăr). Parte dintre aceste implicaţii a fost analizată în lucrările lui Russell, Lewis, Carnap, Reichenbach, Burks, Popper ş.a.

ţine de *sintaxa* ei, vom spune că raportul dintre substituţie şi cuantificare este un raport de la semantic la sintactic; pe un plan mai larg vorbind, este raportul de la *conţinut* la *formă*. Forma este în acest caz expresia conţinutului (limbajul simbolic poate doar să mascheze într-o anumită măsură legătura lui cu conţinutul, însă în nici un caz nu poate face abstracţie totală de această legătură). Această legătură iese şi mai bine în evidenţă cu ajutorul a două identităţi fundamentale care pun în legătură calculul propoziţiilor cu calculul predicatelor:

1) $\forall x\ Fx \equiv Fx_1 \cdot Fx_2 \cdot \ldots \cdot Fx_n$;

2) $\exists x\ Fx \equiv Fx_1 \vee Fx_2 \vee \ldots \vee Fx_n$;

sau în limbajul „algebrei logice":

1) $\prod_{i=1}^{n} Fx_i = Fx_1 \cdot Fx_2 \cdot \ldots \cdot Fx_n$;

2) $\sum_{i=1}^{n} Fx_i = Fx_1 + Fx_2 + \ldots + Fx_n$.

Se înţelege că aceste formule sînt valabile numai în măsura în care mulţimea valorilor lui x este finită. Pentru cazul în care această mulţime este infinită, vom admite doar cu scop *euristic* următoarele identităţi:

3) $\forall x\ Fx \equiv Fx_1 \cdot Fx_2 \cdot \ldots \cdot Fx_n \ldots$;

4) $\exists x\ Fx \equiv Fx_1 \vee Fx_2 \vee \ldots \vee Fx_n \vee \ldots$

În formulele de mai sus, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reprezintă mulţimea valorilor lui x, fiecare semn x_i fiind un nume propriu pentru un element din mulţimea respectivă.

Conform cu identitatea 1), afirmaţia „pentru orice x, x este alb" este identică cu conjuncţia propoziţiilor care apar prin substituirea lui x în funcţia *x este alb* atunci cînd mulţimea valorilor este finită, iar conform cu identitatea 2), afirmaţia „există x, astfel că x este alb" este identică cu disjuncţia propoziţiilor obţinute prin substituţie. Imposibilitatea de a construi conjuncţii şi disjuncţii infinite face ca să acceptăm identităţile 3)—4) numai ca punct de sprijin în cercetare. Acest fapt are însă o deosebită semnificaţie gnoseologică: *logica cuantificării* are o mai mare putere de exprimare decît *logica funcţiilor de adevăr*.

Există însă, după părerea noastră, o problemă şi mai adîncă pe care ne-o relevă identităţile de mai sus: aceste identităţi sînt expresia *logică* a unui proces *istoric* (inductiv). Într-adevăr, trecerea de la $Fx_1 \vee Fx_2 \vee \ldots \vee Fx_n$ la $\exists x\ Fx$ se face printr-un proces de *abstractizare* (se face abstracţie de indivizii concreţi care au proprietatea F şi se reţine faptul că „cel puţin un asemenea individ are această proprietate", nu importă care), iar trecerea de la $Fx_1 \cdot Fx_2 \cdot \ldots \cdot Fx_n$ la $\forall x\ Fx$ se face printr-un proces de *abstractizare* şi *generalizare* (indiferent care ar fi individul din mulţimea respectivă, el are proprietatea F). Dacă numărul n al indivizilor este suficient de mic, atunci pentru generalizare putem efectua un proces de inducţie completă; dacă, dimpotrivă, numărul indivizilor este prea mare sau infinit, generalizarea se face pe baza unei inducţii incomplete. Imaginea logică a procesului de inducţie (generalizare sau simplă abstractizare) poate fi redată în două tautologii:

5) $(Fx_1 \cdot Fx_2 \cdot \ldots \cdot Fx_n \cdot \ldots) \vdash \forall x\ Fx$;

6) $(Fx_1 \vee Fx_2 \vee \ldots \vee Fx_n \vee \ldots) \vdash \exists x\ Fx$.

Pe de altă parte, inversa inducţiei, deducţia (trecerea de la general la particular şi de la abstract la concret), poate fi exprimată în următoarele două tautologii:

7) $\forall x\ Fx \vdash (Fx_1 \cdot Fx_2 \ldots Fx_n \ldots)$;

8) $\exists x\ Fx \vdash (Fx_1 \vee Fx_2 \vee \ldots \vee Fx_n \vee \ldots)$.

Două cazuri particulare ale formulelor de mai sus au fost luate ca axiome ale calculului predicatelor (vezi Hilbert, Ackermann):

9) $\forall x\ Fx \rightarrow Fy$ (ceea ce înseamnă că „din $\forall x\ Fx$ se deduce Fy oarecare");

10) $Fy \rightarrow \exists x\ Fy$ (ceea ce înseamnă că „din adevărul unui Fy oarecare se poate deduce afirmaţia abstractă $\exists x\ Fx$").

Astfel, aceste formule logice care puteau să apară ca vide de orice conţinut şi pur convenţionale apar de astă dată ca expresia exactă a unui conţinut foarte bogat. Devine posibilă în acest fel descoperirea originii chiar şi a celor mai stranii formule ale logicii matematice. *Logica matematică este un mod precis de a codifica procesele logice.* Ea este în aceeaşi măsură teorie a gîndirii, în care este logica generală (clasică).

Revenind la modurile de a trece de la funcţii propoziţionale la propoziţii, ceea ce se poate exprima în schema:

$$Fx \begin{cases} \nearrow Fx_a \text{ (unde } x_a \text{ este o valoare a lui } x\text{)}, \\ \rightarrow \exists x\, Fx, \\ \searrow \forall x\, Fx. \end{cases}$$

Se poate spune că de la o funcţie Fx se poate ajunge la propoziţii prin *individualizare* (substituţie), adică prin construirea unei propoziţii de forma Fx_a prin *abstractizare* ($\exists x\ Fx$) şi *generalizare* ($\forall x\ Fx$). Cu alte cuvinte, fiind dată ideea că „F este o proprietate a ceva", noi putem construi propoziţii fie aplicînd predicatul F unui subiect individual (Fx_a), fie afirmînd *în abstract* existenţa unui asemenea subiect care are predicatul respectiv ($\exists x\ Fx$), fie afirmînd *în general* că orice *individ* (din domeniul considerat) are proprietatea respectivă ($\forall x\ Fx$). În acest fel, fiecare dintre cele trei formule Fx_a, $\exists x\ Fx$ şi $\forall x\ Fx$ exprimă rezultatul a trei operaţii de gîndire diferite.

3. TIPURI DE FUNCŢII PROPOZIŢIONALE

Am trecut în revistă pînă aici un singur tip de funcţie propoziţională, anume aceea care se referă la raportul dintre obiect şi proprietatea sa, „Fx" însemnînd „obiectul x are proprietatea F". Aşa după cum în logica generală oricărui conţinut noţional îi corespunde o sferă, tot aşa în logica matematică oricărei funcţii de forma „Fx" îi corespunde o funcţie de forma „$x \varepsilon F$", adică „x aparţine clasei determinată de proprietatea F". Funcţiile de forma „obiectul... are proprietatea..." vor fi numite funcţii *predicative* (sau intensionale), iar funcţiile de forma „elementul... aparţine clasei determinate de proprietatea..." vor fi numite *funcţii extensionale*. În afară de funcţiile care privesc raporturi intensionale şi extensionale, există şi *funcţii relaţionale*, de forma „obiectul... se află în relaţie cu obiectul (obiectele)..." ($x\ R\ y$).

Teoria relaţiilor are ca scop studierea formelor de raţionare în funcţie de *proprietăţile generale ale relaţiilor*, şi în acest sens

este mai generală decît teoria propozițiilor, teoria predicatelor și teoria claselor. În acest fel, logica matematică are o structură adecvată schemei:

	↗	obiecte (teoria claselor),
propoziție (teoria propozițiilor)	→	proprietăți (teoria predicatelor),
	↘	relații (teoria relațiilor).

Dacă, totuși, logica matematică nu se dizolvă într-o ontologie, aceasta se datorește faptului că ea subordonează cercetarea unui scop neontologic: descoperirea legilor de raționare.

Trebuie să ținem seama că în cadrul fiecăreia dintre teoriile logice de mai sus se introduce un *principiu de ierarhizare*, obținîndu-se astfel logici de diferite ordine. Deoarece nu există o limită a acestor ordine, rezultă că suita formelor de raționare este infinită. Universul formelor logice constituie o simfonie unică. Varietatea și ordinea lumii materiale sînt exprimate în varietatea și ierarhia formelor logice. Iată tabelul care sugerează această varietate:

Funcții de adevăr	Funcții extensionale		Funcții intensionale	
	monadice	n-adice	monadice	n-adice
1) $p, q, r, \ldots$	$x \varepsilon F$	$(x, y, \ldots) \varepsilon H$	$F(x)$	$G(x, y, \ldots)$
2) $f(p, q, r, \ldots)$	$F \varepsilon \varphi$	$(F, G, \ldots$	$\varphi(F)$	$\psi(F, G, \ldots)$
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

Funcții relaționale

$x R y, Q (x, y, \ldots)$

$R(P, Q, \ldots)$

. . . .

Fiecare dintre aceste funcții generează scheme originale de raționare (adică scheme nereductibile la altele prin generalizare).

Printre aceste scheme de funcții logice nu găsim însă binecunoscuta schemă clasică „*S* este *P*". Or, pe baza acestei scheme este construită întreaga silogistică clasică. Se știe că încercările de a îngloba teoria aristotelică în calculul claselor

sau al predicatelor (fără anumite adaosuri care depășesc această teorie) s-au dovedit imposibile. Este interesant deci să studiem mai îndeaproape natura relației „*S* este *P*“. Relația „*S* este *P*“, pe care putem conveni s-o notăm cu $e\ (S, P)$, nu este nici pur și simplu intensională în sensul teoriei predicatelor, nici extensională în sensul teoriei claselor, căci ea nu poate fi înglobată direct în nici una dintre aceste teorii. Tocmai de aceea ea nu poate fi citită nici „*S* are proprietatea *P*“ și nici „*S* aparține lui *P*“. Ea corespunde întru totul gîndirii obișnuite, care este simultan intensional-extensională, gîndire care atunci cînd afirmă, de exemplu, „toți oamenii sînt muritori“ nu înțelege prin aceasta nici pur și simplu „toți oamenii aparțin clasei muritorilor“ și nici doar „toți oamenii au proprietatea de a fi muritori“. Aceste distincții sînt conținute deopotrivă în propoziția „toți oamenii sînt muritori“ și ele apar numai în urma unei analize speciale.

Încercarea de a transcrie schemele de tipul „*S* este *P*“ se izbește de anumite dificultăți.

Să considerăm schema „toți *S* sînt *P*“. Această schemă se convertește în felul următor: „unii *P* sînt *S*“. Această conversiune nu este îngăduită de vreo schemă „Fx“ sau „$x \in F$“, căci nu putem scrie „$x\ F$“ sau „$F \in x$“. Prin urmare, schema „*S* este *P*“ nu poate fi redată de nici una dintre schemele corespunzătoare, deși într-un mod general x joacă rol de subiect în cele două scheme (în sensul că despre el se afirmă ceva).

Deosebirea constă în aceea că în logica aristotelică nu există un principiu de ierarhizare și deci *orice predicat poate deveni subiect* (inversa nu este totdeauna adevărată), în timp ce logica matematică este dominată strict de principii de ierarhie și predicatul nu poate lua niciodată locul subiectului său; el poate deveni subiect numai față de un predicat de ordin superior. În logica aristotelică, însuși principiul termenului mediu este bazat pe posibilitatea indicată mai sus. De exemplu, în silogismul

Toți *A* sînt *B*
Toți *B* sînt *C*
―――――――
Toți *A* sînt *C*

B este predicat în premisa majoră și subiect în premisa minoră și între el și A sau C nu există nici o diferență de ordin.

În logica matematică, un silogism asemănător nu este posibil decît prin respectarea ideii de ierarhie. De exemplu

$$\forall x \ (x \text{ este } F)$$
$$\forall F \ (F \text{ este } \varphi)$$
$$\overline{\forall x \ (x \text{ este } \varphi)}$$

(și aici cu condiția ca un predicat să poată fi aplicat oricărei alte variabile de ordin mai mic decît el și nu doar unei variabile cu un ordin mai mic).

Motive asemănătoare fac să nu putem transcrie schema „S este P" nici prin scheme de tipul „$x \in P$". Transcrierea care se dă judecăților „toți S sînt P", „nici un S nu e P", „unii S sînt P" și „unii S nu sînt P" ridică și ele o mulțime de probleme. Astfel schema „toți S sînt P" se transcrie prin $\forall x \ (Sx \rightarrow Px)$. Cu această ocazie însă se fac următoarele precizări:

a) termenii S și P nu desemnează mulțimi vide de obiecte și deci schema „$\forall x \ (Sx \rightarrow Px)$" nu poate fi identificată cu „$\forall x \ (Fx \rightarrow Gx)$" (ultima fiind mai generală, în sensul că F și G pot desemna și mulțimi vide);

b) în schema „toți S sînt P" se presupune că S există (adică nu e mulțime vidă) și deci are un statut *categoric*, în timp ce în scheme „Sx" el este doar ipotetic afirmat despre x;

c) relația *sînt* din schema „toți S sînt P" este o relație între termeni care în schema „$\forall x \ (Sx \rightarrow Px)$" se traduce printr-o relație între propoziții ($\rightarrow$), în timp ce relația *sînt* din schema „unii S sînt P" se traduce printr-o conjuncție în schema „$\exists x \ (Sx \& Px)$". Care este concluzia ce se desprinde din ireductibilitatea schemei „S este P" la scheme din logica matematică?

Gîndirea intuitivă funcționează fără o diferență de ordine între subiect și predicat, fără o distincție între latura intensională și cea extensională a conceptelor. Logica modernă sparge unitatea conceptului și introduce principii riguroase de ordine. Judecățile intuitive ale silogisticii aristotelice nu pot fi reduse la judecățile mai abstracte ale logicii matematice, așa cum în genere concretul nu poate fi redus la abstract. Numai un sistem de restricții poate crea o corespondență operațională* între for-

* Adică oricărei operații efectuate cu o formă îi corespunde o operație efectuată cu cealaltă formă.

mele silogisticii aristotelice și formele logicii moderne. Ireductibilitatea formelor gîndirii exprimă ireductibilitatea formelor realului. Gîndirea logică studiază problema trecerii de la o formă la alta și nu a reducerii lor una la alta, lucru care în ultimă instanță se dovedește imposibil fără o *sacrificare* a posibilităților lor de exprimare, de informare, chiar cînd există reguli precise de trecere de la o formă la alta echivalentă cu ea. Și fiindcă a venit vorba de formule echivalente în sensul deducției reciproce una din alta, și nu doar în sensul unei echivalențe matriceale (matriceal orice tautologie este echivalentă cu oricare alta, fără a decurge de aici că orice tautologie s-ar deduce din oricare alta și reciproc), este necesar să precizăm că aceasta nu înseamnă niciodată în mod nemijlocit și o identitate în ce privește puterea de exprimare (adică informațională). Formula $p \to q$ este echivalentă cu $\bar{p} \vee q$, adică $p \to q = \bar{p} \vee q$, însă ele nu sînt echipolente (identice informațional), căci una este a afirma „p implică q" și alta „non-p sau q", deși aceste două forme se implică reciproc, adică sînt tautologic legate. Echivalența dintre „$p \to q$" și „$\bar{p} \vee q$" nu înseamnă că ele exprimă aceeași funcție, căci, în timp ce $p \to q$ este o funcție simplă, $\bar{p} \vee q$ este o funcție de funcții. Ele coincid numai în ce privește codomeniul, nu și în ce privește domeniul. La fel forma „$\overline{VxFx}$" nu redă absolut exact aceeași informație ca forma „$\exists x \bar{F}x$". Într-adevăr, există o diferență precisă între „nu este adevărat că pentru toți x are loc Fx" și „există x pentru care nu are loc Fx". Pe scurt, *deducția reciprocă nu înseamnă un transfer total de informația de la A la B, ci o prelucrare de informație și un transfer de adevăr (în cazul că premisele sînt adevărate)*. De altfel, problema transferului de informație se pune în mod direct abia la nivelul formelor semantice.

4. LEGEA LOGICĂ

Dacă punctul de plecare al logicii matematice este funcția logică, punctul ei de sosire este legea logică, sau, metodologic vorbind, procedeul (regulile) de raționare. Pentru gnoseologia

materialist-dialectică, conceptul de „lege" este fundamental. Orice știință are ca obiectiv *descoperirea de legi*. Și logica nu face excepție din acest punct de vedere. Dar materialismul dialectic precizează că legile au un caracter relativ, concret, că ele sînt în funcție de anumite condiții și nu un „cadru absolut" în care se desfășoară fenomenele. Deși logica formală studiază legi foarte generale, vom vedea că nici ele nu fac excepție în sensul caracterului relativ și concret. Trebuie să spunem că nu întotdeauna conceptul de *lege logică* este clar înțeles, și de aceea, înainte de a face unele reflecții filozofice, vom încerca să facem precizările necesare. Am definit deja conceptul de lege logică; nu facem decît să-l reamintim.

Df. I. *Legea logică este un raport de trecere de la o mulțime de propoziții T la o propoziție A, astfel că, ori de cîte ori T reprezintă o mulțime de propoziții adevărate, A este de asemenea o propoziție adevărată*. Această definiție rămîne valabilă și pentru logica matematică; dar logica matematică dispune și de o altă definiție mai adecvată conceptelor ei. Pentru aceasta, urmîndu-l pe Tarski, vom da o anumită generalizare a termenului de funcție logică. Funcția logică cuprinde și propoziția ca un caz-limită. Astfel, propoziția este funcția propozițională care nu are nici o variabilă liberă.

Df. II. *Se numește lege logică funcția propozițională adevărată independent de semnificația variabilelor ei*. În acest fel, legea logică este definită de la început ca o propoziție adevărată. Există însă o diferență esențială între definițiile I și II. În timp ce definiția I se referă la un *raport* care guvernează trecerea de la unele propoziții la altele, definiția II se referă la o... *expresie* a teoriei logice. Această diferență se explică prin caracterul echivoc al termenului de „lege", care se aplică fie la un *raport între obiecte*, fie la *propoziția care oglindește raportul dintre obiecte*. În al doilea caz, termenul de lege poate fi considerat uneori ca sinonim cu „teorema" sau „axioma". Există și denumiri proprii logicii matematice, denumiri pe care le reamintim: „tautologie", „expresie identic-adevărată", „identitate logică" sau „expresie universal-valabilă". Indiferent de accepția pe care o dăm termenului de „lege", definițiile vor fi

legate între ele în sensul că dacă definiția I (logica generală) trimite direct la *raport*, definiția II (logica matematică) trimite la o *propoziție* care reflectă raportul. În primul caz definim specificul raportului, în al doilea caz specificul propoziției care redă raportul respectiv (raportul de deducție). Procedeul se bazează pe convingerea fundamentală că structura logică a propoziției este expresia unor raporturi reale.

Tot în legătură cu legea logică se cere să precizăm încă unele lucruri. Am afirmat mai sus că legea logică este un raport (sau expresia unui raport). Cu toate acestea, există simboluri care au de asemenea un înțeles echivoc; astfel stau lucrurile cu semnul „$\vee$" (sau) în legea terțiului exclus: „$p \vee \bar{p}$". Conform cu definiția legii logice, semnul „$\vee$" ar trebui să fie aici expresia unei relații; or, noi, încă la primii pași pe care-i facem în logica matematică, îl tratăm ca expresie a unei *operații*. Este, așadar, „$\vee$" o operație sau o relație? Este și una, și alta. Depinde de unghiul de vedere. Dacă considerăm disjuncția ca pe un mod de a forma propoziții compuse pornind de la alte propoziții, atunci avem în vedere o operație (de gîndire): operația formării de propoziții prin disjuncție. Dacă considerăm rezultatul operației, atunci avem în vedere o relație. Actul formativ însă se distinge de rezultatul său fără a se rupe de el, căci rezultatul este tocmai *imaginea statică* a actului. Relația este rezultatul operației. Există și o altă distincție necesară pentru înțelegerea conceptului de lege logică: este vorba de raportul dintre *lege* și *regulă*. De această distincție depinde explicarea unor termeni cum ar fi „corectitudinea", „teoretic", „normativ", „metodă", „metodologie" etc. Dacă *legea* se referă la o relație, *regula*, dimpotrivă, vizează o operație, căci regula este o *propoziție care ne arată modul în care, pornind de la anumite date, obținem un anumit rezultat*. De obicei regula se formulează ca o propoziție ipotetică: „dacă pornim de la..., obținem rezultatul...". De exemplu: „dacă toți *B* sînt *C* și toți *A* sînt *B*, atunci și toți *A* sînt *C*" (sau dacă sînt date propozițiile adevărate de forma „toți *B* sînt *C*" și „toți *A* sînt *B*", se obține propoziția adevărată „toți *A* sînt *C*"). Pe ce se bazează această regulă (indicație)? Pe faptul că trecerea de la propozițiile de

forma „toţi *B* sînt *C*" şi „toţi *A* sînt *B*" la propoziţia de forma „toţi *A* sînt *C*" este guvernată de relaţia de implicaţie între aceste forme. Indiferent dacă cineva doreşte să nu se treacă de la propoziţiile de forma dată la propoziţia de asemenea de formă dată, raportul de implicaţie între aceste forme există. Acest raport este descris de noi într-o *lege*, iar *legea* (în aceeaşi formulare sau într-una mai adecvată) devine pentru noi criteriu, normă sau regulă de *operare*. Se poate deci spune că orice lege devine regulă (normă) prin aplicarea la anumite operaţii. Vom distinge deci între lege ca expresie a unui raport şi lege ca indicaţie asupra modului în care trebuie să operăm pentru a obţine un anumit rezultat (şi, în definitiv, pentru... a realiza legea într-un caz particular). Va trebui să mai spunem că dacă conceptul de lege are un conţinut obiectiv (independent de om şi omenire); dimpotrivă, regula presupune prin definiţie omul, el fiind singura fiinţă capabilă să formuleze reguli de operaţie în conformitate cu anumite legi obiective.

Aşadar, o propoziţie ca expresie a unui raport legic obiectiv va fi numită *lege*; aceeaşi propoziţie (sau una construită pe baza ei) aplicată la anumite operaţii va fi *regulă*. În teoriile deductive, deosebirea dintre lege (axiomă sau teoremă) şi regulă se impune totdeauna. *Teoria este mulţimea propoziţiilor care reflectă legile unui domeniu de obiecte, mulţime organizată după anumite criterii logice (de obicei deductive)*. Din acest punct de vedere, o lege este o propoziţie *teoretică*. Considerînd sistemul lui Hilbert şi Ackermann (calculul propoziţiilor), expresia „$(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$" este o lege logică (o axiomă). Pe baza ei, autorii formulează următoarea regulă pentru efectuarea proceselor deductive în sistemul respectiv: „dacă $A \vee B$ reprezintă o formulă demonstrată, atunci $B \vee A$ reprezintă de asemenea o formulă demonstrată". Conform cu această regulă, nu putem trece de la $A \vee B$ la formula $B \vee A$ decît dacă am demonstrat în prealabil pe $A \vee B$; în caz contrar trecerea nu este *corectă*. Cu aceasta însă am pătruns în sfera unui nou concept, *corectitudinea*. Corectitudinea este o proprietate a unei operaţii (a unui act). Se spune că operaţia este *corectă* dacă şi numai dacă ea este efec-

tuată conform cu anumite reguli. Corectitudinea este deci un concept relativ la anumite reguli. Grupul regulilor suficiente pentru a înfăptui o operaţie (în vederea obţinerii unui anumit rezultat) poartă numele de *procedeu* sau *metodă*. Deoarece orice propoziţie a unei teorii poate deveni regulă, se poate spune că orice ştiinţă este în acelaşi timp *teorie* şi *metodă*, *teoretică* şi *normativă*. În acelaşi mod stau lucrurile cu logica. Ea este teoretică (în sensul că reflectă legile gîndirii) şi normativă (în sensul că dă reguli de operare pentru gîndire). O gîndire este *conştientă* (de sine) cînd cunoaşte regula în virtutea căreia operează. O gîndire care nu cunoaşte regulile în virtutea cărora operează este o gîndire spontană, o gîndire care acţionează în virtutea unor deprinderi (a unor reflexe).

Prin prisma celor de mai sus, logica nu poate fi pur şi simplu o ştiinţă pur normativă şi cu atît mai puţin convenţională (normele ei depind de anumite raporturi logice necesare). Trecînd cu vederea legătura normelor logicii cu anumite condiţii (legi) care se impun în mod necesar oricui vrea să treacă de la propoziţii adevărate la propoziţii adevărate, Rudolf Carnap scria: „In der Logik, gibt es keine Moral. Jeder mag seine Logik, d.h. seine Sprachform, aufbauen wie er will"[1]. Cu atît mai mult legile nu pot fi reduse la simple forme de limbă *(Sprachforms)*. „În sens abstract — scrie A. Church — legile gîndirii nu depind, de exemplu, de aceea dacă se foloseşte C sau ($\supset$) în calitate de semn al implicaţiei sau dacă se scrie $P(x)$ sau xP (predicatul înainte sau după obiect)"[2].

De altfel concepţia convenţionalistă (subiectivistă) cu privire la legile gîndirii este strîns legată de o anumită înţelegere a propoziţiilor tautologice (analitice) şi a logicilor polivalente. Reichenbach se exprima precis, scriind: „Tautologia este o noţiune vidă; ea nu ne spune nimic asupra valorii propoziţiilor sale elementare... Această noţiune de «vid» trebuie distinsă de noţiunea «lipsit de sens»..."[3]. Dar Carnap exagerează:

---

[1] Rudolf Carnap. *Logische Syntax der Sprache*, Viena, 1934, p. 45.
[2] Ibidem, p. 211.
[3] Hans Reichenbach. *Introduction à la logistique*, Paris, 1939, p. 16.

„Tautologiile sînt deci enunțuri *vide*, fără conținut; ele nu ne învață nimic"[1]. Vorbind despre propozițiile analitice, ne-am expus punctul de vedere cu privire la aceste idei. Nu vom face acum decît să dăm o anumită dezvoltare acestui punct de vedere. Legile gîndirii (tautologiile logicii matematice) depind de conținut sub diferite aspecte:

a) prin origine (am văzut cum pot fi obținute prin abstractizare), căci ele sînt în majoritatea lor cele mai banale, mai des repetate raporturi;

b) prin aceea că depind de *structura propoziției* (respectiv structura funcției), care, la rîndul ei, este expresia unor raporturi generale ontologice (de exemplu $F(x)$ este expresia raportului dintre obiect și o proprietate a sa);

c) fiind condiții necesare cunoașterii adevărului (deci a ceva dependent de realitatea obiectivă), sînt ele înseși dependente în acest fel de o realitate care ne depășește;

d) multe dintre aceste legi (posibil toate) sînt în fond cazuri particulare ale unor principii mai generale ontologice;

e) valabilitatea acestor legi este în funcție de anumite particularități informaționale ale propoziției (fapt dovedit de logica polivalentă)*.

Dacă legile gîndirii (tautologiile) n-ar depinde în nici un fel de conținut, dacă ele n-ar avea nici o legătură cu existența în genere, adică ar fi independente de orice experiență, dacă în cazul omului ele s-ar forma independent de orice experiență (ceea ce studiile ontogenetice infirmă), dacă ele ar fi descoperite independent de experiență și experiența n-ar avea nici un rol în confirmarea propozițiilor logicii, dacă ele ar fi, cu un cuvînt, *apriorice*, așa cum spunea Kant, atunci ar fi inexplicabil în ce fel anume mai pot fi ele aplicate la o realitate cu care n-au nici o contingență. Ba nu, ar mai rămîne o soluție: soluția idealismului absolut; legile gîndirii nu sînt abstrase din reali-

---

[1] Rudolf Carnap. *L'ancienne et la nouvelle logique*, Paris, 1933, p. 29.

* De altfel, dependența tautologiilor de conținut rezultă chiar din definiția lor semantică. În logica propozițiilor, tautologiile se definesc în raport cu mulțimea propozițiilor „adevărate" și a propozițiilor „false", în logica claselor prin raport cu „universul" și „clasa vidă", în logica predicatelor prin raport cu „indivizii" și cu „proprietățile" etc.

tatea gîndirii, care, la rîndul ei, este expresia realității obiective, ci ele sînt cadre care preexistă acestor realități și datorită cărora însăși această realitate trece dintr-un stadiu amorf într-unul organizat. Iată deci unde ne duce concepția lui Wittgenstein, Russell, Reichenbach, Carnap ș.a. despre legile gîndirii: înapoi la Kant. Inconsistența logică a idealismului kantian și a formelor extreme de idealism subiectiv a fost de mult arătată de clasicii marxism-leninismului, și îndeosebi de către Lenin în lucrarea sa *Materialism și empiriocriticism*. Teoria materialistă asupra legilor gîndirii se dovedește nu numai prin inconsistența teoriei adverse, ci și prin puterea ei explicativă, și mai ales prin întreaga evoluție a științei și practicii moderne. Se știe că *această știință și practică ne-au obligat să ne revizuim concepția cu privire la așa-numitele principii și forme ale gîndirii*. Aceste principii sînt binecunoscutele propoziții ale identității, noncontradicției, terțului exclus și rațiunii suficiente (la acestea se poate adăuga legea dublei negații). Care este starea actuală a acestor principii? Aristotel construise o logică puternic impregnată de ontologie. Epoca modernă, mai ales în perioada dezvoltării formalismului, a voit să se debaraseze total de ontologie („logica este liberă de ontologie". *Carnap*). Acestei tendințe i se opune însă puternic dezvoltarea practicii moderne, care nu numai că refuză ruperea logicii de ontologie (și în speță de procesele materiale), ci, dimpotrivă, cere să restabilim și să stabilim cît mai strîns această legătură. Iată ce spune un reprezentant al acestei practici, inginerul francez M. Touchais: „Din punct de vedere formal, calculul logic nu este decît sistematizarea și dezvoltarea acestei dualități fundamentale, a acestei dihotomii funciare care se dezvăluie la tot pasul în faptele pe care noi le observăm sau în interpretările pe care le dăm"[1]. Aceasta cu privire la originea formalismului logic. Apoi, „formalismul logic acoperă o realitate mai profundă, mai abstractă, *care depășește simplul cadru al expresiei precise a gîndirii pentru a pătrunde în mediul fizic*"[2].

---

[1] M. Touchais. *Les applications techniques de la logique*, Paris, 1956, p. VII–VIII.
[2] Ibidem, p. VIII (subl. ns.).

Şi acest lucru este dovedit de tehnica modernă (în speţă de tehnica sistemelor electrice), căci „tehnica omului pune în evidenţă fenomene care analitic se comportă ca şi gîndirea sa"[1]. *Aşadar, formalismul logic nu numai că n-a eliberat logica de orice ontologie, ci a descoperit calea de a stabili această legătură într-un mod mult mai precis decît o făcuserăm pînă aici.*

O schemă logică cum este aceea a terţului exclus „$p \vee \bar{p}$" nu înseamnă, ca pînă acum, doar faptul că orice propoziţie sau este adevărată sau nu este adevărată, ci şi faptul că un contact este sau *închis* sau *deschis* ş.a. de acest gen. Ca să ne exprimăm după o modă franceză, formula *„$p \vee \bar{p}$" nu constituie doar statutul unei propoziţii, ci şi al unui contact electric.* Evident că trebuie să existe ceva mai general care încadrează aceste cazuri particulare (situaţia unei propoziţii şi situaţia unui contact), ceva care să unească realitatea fizică cu realitatea gîndirii. Este ceea ce filozofii numesc *ontologie* (raporturi ontologice). Se ştie că în logica generală se dau uneori formulări pentru principiile gîndirii, pe care totuşi numai în mod superficial le-am putea considera drept legi specifice gîndirii. Conştienţi de această situaţie, noi am dat o clasificare a diferitelor formulări ale acestor principii în lucrarea noastră *Introducere în logica matematică.* Iată formulările ontologice.

1. *Principiul ontologic al identităţii*: în acelaşi timp şi sub acelaşi raport, orice lucru este identic cu sine.

2. *Principiul ontologic al necontradicţiei*: în acelaşi timp şi sub acelaşi raport, un lucru nu poate să fie şi să nu fie.

3. *Principiul ontologic al terţului exclus*: în acelaşi timp şi sub acelaşi raport, un lucru sau este sau nu este, a treia posibilitate nu există.

4. *Principiul ontologic al „raţiunii suficiente"*: orice lucru există în virtutea unui temei (a unei cauze).

Evident că aceste principii pot fi considerate drept legi ale gîndirii numai într-un sens metodologic (în sensul că ele pot fi norme pentru gîndire) şi nu în sensul că ele sînt legi *specifice* gîndirii.

---

[1] Ibidem.

Față de principiul ontologic al terțului exclus, atît judecata „orice propoziție sau este adevărată sau falsă, a treia posibilitate nu există", cît și judecata „orice contact este sau închis sau deschis, a treia posibilitate nu există" sînt doar simple cazuri particulare. *Dacă am putea traduce toate formulările propriu-zis logice în formulări ontologice, atunci ar fi inutil să mai vorbim despre o logică formală ca știința despre gîndire; ea ar deveni pur și simplu o ontologie formală care s-ar aplica automat și la gîndire.* De exemplu, ar trebui să vedem dacă schemele:

Toți *B* sînt *C*		Toți *A* sînt *B*
Toți *A* sînt *B*	și	Toți *B* sînt *C*
Toți *A* sînt *C*		Toți *A* sînt *C*

pot fi regăsite întocmai într-o ontologie formală. După părerea noastră, toate raporturile prezente în aceste scheme pot fi traduse în limbaj ontologic, cu excepția *procesului* de trecere de la una la alta. Fie, de exemplu, silogismul

Toate vertebratele sînt animale
Toate mamiferele sînt vertebrate
———
Toate mamiferele sînt animale.

Mamiferul este simultan vertebrat și animal și nu există vreun proces de trecere de la o proprietate la alta. *Însă ceea ce în realitate este dat simultan în gîndire este reprodus succesiv.* Așadar, rămîne un *ireductibil* (cel puțin așa mi se par în momentul de față a sta lucrurile): *procesul de trecere de la unele propoziții la altele.* Faptul că o parte din legile logicii formale pot deja în momentul de față să fie traduse în limbaj ontologic ne arată că înainte de a preda logica trebuie să predăm ontologia formală (există încă ontologia dialectică). Logica modernă a mai adus în discuție și o altă problemă: nu pare a fi vreun temei pentru a considera cele patru principii drept propoziții privilegiate față de alte propoziții ale logicii, căci ele nu sînt axiome într-un sens absolut, ci în funcție de sistem ele pot fi sau axiome sau teoreme (propoziții deduse). Prin urmare, această logică a încercat să se dispenseze de ideea de principiu (o dată ce a dat un înțeles precis termenului de „axiomă"). Pe de altă parte, și acesta este faptul cel mai interesant, logica modernă a arătat

că aceste principii își pierd caracterul „absolut", că ele trebuie lexibilizate în funcție de caracteristicile informaționale ale propozițiilor*. De exemplu, așa cum a arătat Brouwer, terțul exclus își pierde valabilitatea în domeniul mulțimilor transfinite. În logica trivalentă a lui Łukasiewicz se admite principiul excluderii cvartului: $p = 1$ sau $p = 0$ sau $p = 1/2$, a patra posibilitate este exclusă. În genere, dacă avem n valori, se formulează principiul excluderii celei de a $n + 1$ posibilități. Gr. C. Moisil crede chiar că „o propoziție nu va putea fi în același timp adevărată și falsă, nici adevărată și problematică, nici problematică și falsă; în aceasta constă un nou principiu al contradicției"[1].

Desigur este discutabil dacă adevărul este incompatibil cu problematicul sau că falsul este incompatibil cu problematicul. În concluzie, există fapte care ne determină să adoptăm o viziune concretă, relativă, adică o viziune dialectică asupra principiilor gîndirii și să renunțăm la concepția aprioristă a lui Kant în mod definitiv. Astfel legea $p \vee \bar{p}$ își încetează existența în orice sistem n — valent $(n>2)$, legea $\overline{p \cdot \bar{p}}$ nu acționează în logica trivalentă a lui Łukasiewicz, legea identității nu are loc în logica trivalentă a lui Bocivar, iar dubla negație nu mai este adevărată în logica infinitistă a lui Heyting. Asupra acestor fapte ne vom opri mai pe larg în capitolul următor; aici ele ne interesează în măsura în care pun în lumină dependența legilor gîndirii de un anumit conținut (de particularitățile informaționale ale propozițiilor). Există însă și fapte care atestă ideea că ele rămîn în continuare propoziții fundamentale, privilegiate și deci principii. Iată aceste fapte:

a) o condiție fundamentală a oricărui sistem este noncontradicția; b) dacă într-un sistem S nu este valabilă o lege logică T, nu este valabilă nici negația ei; c) terțul exclus funcționează în planul metateoretic într-o formă dată de Șestakov (pentru ori-

---

* Iată ce scria Wittgenstein în al său *Tractatus logico-philosophicus*": „4.461. Propoziția arată acel lucru despre care ea vorbește; tautologia și contradicția arată că ele nu spun nimic. Tautologia nu are condiții de adevăr, pentru că ea este necondiționat adevărată; iar contradicția nu este adevărată în nici un caz".

[1] Gr. C. Moisil. *Încercări vechi și noi de logică neclasică*, București, Editura științifică, 1966, p. 79.

ce valoare i este adevărat că $i = k$ sau $i \neq k$, a treia posibilitate nu există); d) deoarece orice sistem trebuie să admită o interpretare, el presupune legea identității în sensul că nici o formulă a sa nu admite în același timp și sub același raport mai mult de o interpretare; în particular această lege guvernează regula de substituție. În concluzie, legile de mai sus joacă în continuare un rol fundamental, căci ele guvernează dintr-un plan metateoretic teoriile logice și orice teorie construită după criterii logice: legea identității guvernează interpretarea (și substituția), legea noncontradicției guvernează sistemul ca o proprietate fundamentală a acestuia, terțul exclus constituie statutul indispensabil oricărei valori logice (o propoziție are sau nu are o anumită valoare), iar rațiunea suficientă este sinonimă cu cerința acceptării numai prin demonstrație a unei propoziții în sistem. În general se poate spune că, deși un sistem logic poate să nu ateste valabilitatea unuia dintre principiile de mai sus, în metateoria acestui sistem ele apar în mod inevitabil. În acest fel,cele patru legi continuă să rămînă privilegiate, adică principii cel puțin în sensul de *principii metateoretice* ale oricărui sistem (teorii) logic. Aceasta însă nu anulează cîtuși de puțin ideea caracterului lor relativ, valabilitatea lor în funcție de procesul concret al gîndirii și în general al cunoașterii.

Capitolul al III-lea

Conceptul de adevăr în logica matematică

Capitolele I şi al II-lea au fost consacrate studierii ştiinţei logicii din punctul de vedere al conţinutului ei. Într-un anumit înţeles, capitolul de faţă abordează aceeaşi problemă, dar într-un sens mai restrîns, căci nu ne interesează aici numai legăturile generale cu conţinutul, ci, ca să spunem aşa, gradul de reproducere exactă a acestui conţinut. Ni s-a relevat faptul că logica matematică ridică numeroase probleme pentru teoria cunoaşterii din unghiul de vedere al obiectului, al naturii funcţiilor logice şi al legilor logice. Multe dintre ele sînt probleme speciale care sînt rezolvate de o epistemologie concretă (ceva analog cu o estetică a muzicii, estetica picturii etc.). Dar ea nu numai că a dat naştere la probleme speciale cu semnificaţie pentru teoria cunoaşterii, ci a împins pe primul plan însăşi studierea unor concepte centrale ale teoriei cunoaşterii, se înţelege în primul rînd conceptul de adevăr. Acest concept va sta în atenţia noastră în acest capitol.

1. DEFINIREA CONCEPTULUI DE ADEVĂR

Apariţia unor contradicţii adînci în sistemele logice-matematice (în primul rînd în sistemul lui Frege şi în teoria mulţimilor a lui Georg Cantor) a afectat profund conceptul de adevăr, concept care în istoria filozofiei a avut o evoluţie complicată. Sub influenţa diferitelor şcoli filozofice, termenul de „adevăr" şi-a pierdut sensul univoc pe care gîndirea antică, prin Aristotel, îl stabilise. În cele ce urmează noi vom analiza principalele definiţii ale conceptului de adevăr şi *dificultăţile logice* pe care le ridică aceste definiţii.

Opunîndu-se concepțiilor subiectiviste ale sofiștilor, după care adevărul poate fi identificat cu înseși părerile oamenilor despre lucruri, Aristotel dezvoltă concepția despre adevărul obiectiv. În lucrarea sa *Metafizica*, Aristotel dă cîteva caracterizări conceptului de adevăr. Deși există unele diferențe între aceste caracterizări, toate concordă între ele sub un aspect: adevărul este corespondența ideilor noastre cu realitatea. Examinînd terțul exclus, Aristotel scrie: „A enunța că ceea ce este nu este sau că ceea ce nu este este constituie o propoziție falsă; dimpotrivă, o enunțare adevărată e aceea prin care spui că este ceea ce este și că nu este ceea ce nu este"[1]. În această caracterizare, *acordul* sau *dezacordul* enunțării cu existența constituie esențialul pentru definirea ideilor de adevăr și fals. El distinge net între ceea ce „spui că este" (realitatea ideală) și „ceea ce este" (realitatea ontologică).

În cartea a VI-a din *Metafizica*, Aristotel caracterizează din nou adevărul și falsul, dar de astă dată cu unele modificări: „Cît privește însă Ființa ca ceva adevărat și Neființa ca ceva fals, ele constau într-o unire și separare, adică în genere într-o despărțire a termenilor opoziției contradictorii. Căci adevărată este afirmația despre ceea ce în realitate este unit și negația despre ceea ce în realitate este despărțit, iar falsul constă în opoziția față de această afirmație sau negație"[2]. Care sînt elementele noi pe care le aduce această caracterizare? În primul rînd, adevărul și falsul apar ca moduri particulare ale Ființei și Neființei. Adevărul este Ființa în sensul îmbinării termenilor „în cuget" și nu în sensul de „Ființa lucrurilor". În al doilea rînd, Aristotel definește adevărul și falsul nu prin raport cu enunțarea în genere, ci prin raport cu *afirmația* și *negația*. Pe această bază el capătă posibilitatea definirii falsului prin raport cu adevărul și nu direct prin raport cu realitatea. Falsul este „opoziția" față de adevăr.

În cartea a IX-a, Aristotel dă o nouă definiție adevărului. Despre Ființă și Neființă poate fi vorba „în sensul de adevărat

---

[1] Aristotel, *Metafizica*, București, Editura Academiei, 1965, p. 155.
[2] Ibidem, p. 215.

şi de fals, care este sensul lor de căpetenie. Aceasta depinde, cît priveşte lucrurile, de însuşirea lor de a se prezenta ca unite sau despărţite şi, prin urmare, calea adevărului aparţine acelui care socoate drept despărţit ceea ce este în realitate despărţit şi ca unit ceea ce este unit, precum este în eroare acela ce gîndeşte contrar de cum sînt lucrurile în realitate. Se pune acum întrebarea: cînd are loc ceea ce noi numim adevărat sau fals? Aceasta e chestiunea ce trebuie examinată. Într-adevăr, tu, de pildă, nu eşti alb pentru că noi credem pe drept cuvînt că eşti alb, ci pentru că eşti alb sîntem pe calea adevărului cînd afirmăm acest lucru"[1]. Ca şi în primele două caracterizări, Aristotel reia ideea fundamentală a acordului (concordanţei, corespondenţei) sau dezacordului „gîndirii" (p. 302) cu realitatea. Dar şi aici el aduce elemente noi, importante pentru teoria adevărului. Reţinem în mod deosebit faptul că el nu numai că pune problema unui raport de corespondenţă între gîndire şi realitate, dar acest raport este astfel încît realitatea *condiţionează* adevărul gîndirii şi nu invers (vezi: „pentru că tu eşti alb sîntem pe calea adevărului cînd afirmăm acest lucru"). Demne de remarcat sînt şi următoarele aspecte: Aristotel caută mereu corespondenţe între *categorii ontologice şi categorii subiective* (cu sferă de aplicaţie numai la gîndire), astfel: *Fiinţa* şi *enunţarea fiinţei*, *Nefiinţa* şi *enunţarea nefiinţei*; *unirea* şi *afirmarea*, *separarea* şi *negaţia*. Falsul este identificat cu negarea (opusul) adevărului, şi în acest fel Aristotel leagă de la început principiul terţului exclus de definiţia acestor două valori. Cu alte cuvinte, dacă p este o propoziţie adevărată, non-p este în mod necesar o propoziţie falsă, căci falsul este „opoziţia" faţă de adevăr. Este posibil să găsim definiţiilor date de Aristotel unele cusururi terminologice, aşa cum arată Tarski, însă intenţia generală a acestor formulări este pe deplin clară.

Precum se ştie, definiţia aristotelică a fost preluată în esenţa ei de către materialismul dialectic. De asemenea ea este definiţia cu care se operează în ştiinţă şi în viaţa de toate zilele. Încercările de a renunţa la ea au fost infirmate de evoluţia ştiinţelor.

---

[1] Ibidem, p. 301–302.

Logic vorbind, apar unele dificultăţi, care sînt legate de raporturile ce se stabilesc între aceşti patru termeni: „enunţ", „om", „criteriul adevărului" şi „realitate", pe de o parte, şi „adevărul", pe de altă parte. Referindu-ne la Aristotel, vom analiza însă dintr-o perspectivă mai largă aceste dificultăţi care vizează definiţia adevărului în genere.

Pentru sofiştii extremişti, enunţul era suficient sieşi pentru a fi adevărat, aceasta avînd în vedere caracterul instabil al realităţii. Cu alte cuvinte, din acest punct de vedere a *enunţa* înseamnă în acelaşi timp *a fi adevărat*. Această concepţie este net subiectivistă; ea pierde din vedere tocmai ideea adevărului obiectiv (a conţinutului obiectiv al ideilor adevărate). Este marele merit al lui Aristotel de a fi pus în drepturile sale ideea adevărului obiectiv. Faţă de extrema sofistă a existat şi extrema idealismului obiectiv (Platon, Hegel), care face din idei (şi deci şi din adevărul lor) o existenţă reală independentă de om şi de omenire. Definiţia lui Aristotel evită şi această extremă. Desigur ca şi în alte probleme legate de raportul dintre gîndire şi realitate, se simte şi aici la Aristotel o nesiguranţă, cel puţin terminologică; în general însă se degajează liniile generale ale concepţiei lui: a) adevărate sînt enunţurile, b) *adevăr* înseamnă acordul enunţurilor cu realitatea şi c) adevărul enunţurilor este condiţionat de realitatea la care se referă. S-a afirmat de multe ori că definiţia dată de Aristotel adevărului este *materialistă*. Nouă ni se pare că această afirmaţie este substituită pe nedrept alteia precise: Aristotel are o concepţie materialistă despre cunoaştere. Dată fiind importanţa ei, vom lua în discuţie aici problema raportului dintre *definiţia adevărului* şi *materialism*.

Enunţurile noastre pot să se refere atît la realitatea materială, cît şi la cea ideală sau la raportul dintre ele. Astfel de enunţuri ca „Luna este un satelit al Pămîntului" şi „Pămîntul se învîrteşte în jurul Soarelui" se referă la o realitate materială, dar enunţurile „percepţia constă din senzaţii", „noţiunea este o formă de reflectare" şi „propoziţia *B* se deduce din propoziţia *A*" nu pot fi considerate că se referă la realitatea materială. Dacă adevărul ar viza neapărat realitatea materială, ar decurge de aici sau că trebuie să excludem din rîndurile enunţurilor pe acelea

care se referă la realitatea ideală, sau să ştergem orice distincţie între ideal şi material.

Se înţelege că nici o asemenea concluzie nu poate fi admisă și deci, logic, nici premisele de la care pornim. Urmează că definiţia adevărului nu implică neapărat ideea de realitate materială. Entitatea la care raportăm adevărul este ontologică, cu alte cuvinte este *existenţa în genere*, fără vreo altă specificare (materială sau ideală). Să reamintim unele lucruri spuse de Friedrich Engels în *Anti-Dühring* pe tema raportului dintre *existenţă* şi *materialitate*: „Cînd vorbim despre *existenţă** şi *numai* despre ea, unitatea poate consta numai în faptul că toate obiectele despre care este vorba *sînt*, există. Ele sînt reunite în unitatea acestei existenţe, şi numai în această unitate, iar enunţul general potrivit căruia toate *sînt* nu numai că nu le poate conferi alte însușiri, comune sau necomune, ci exclude pentru moment luarea în considerare a oricăror asemenea însuşiri. Căci, de îndată ce ne îndepărtăm, fie numai cu un milimetru, de la simplul fapt fundamental că toate aceste lucruri au ca trăsătură comună existenţa, imediat încep să se ivească în faţa ochilor noştri *deosebirile* dintre aceste lucruri...

Unitatea lumii nu constă în existenţa ei, deşi existenţa ei este o condiţie prealabilă a unităţii sale... Adevărata unitate a lumii constă în materialitatea ei..."[1]. Aşadar, raportarea la existenţă (la obiect în genere) nu înseamnă implicit şi afirmarea materialităţii (astfel am comite o eroare à la argumentul ontologic dacă din afirmarea existenţei am trece imediat la natura ei).

Diferenţa dintre existenţă și materie apare net şi în problema fundamentală a filozofiei (vezi *Ludwig Feuerbach şi sfîrşitul filozofiei clasice germane)*. Engels arată că problema fundamentală a oricărei filozofii (deci a filozofiei lui Platon şi Aristotel, a lui Berkeley și Diderot, a lui Hegel și Marx etc.) este problema raportului dintre *existenţă* și *gîndire*. Fiecare dintre filozofiile

---

* În noua ediţie (1966) a traducerii operei *Anti-Dühring* s-a introdus termenul de „fiinţare" în loc de „existenţă". După părerea noastră, este o inovaţie care în traducerea *Logicii* lui Hegel îşi are rostul ei, dar care aici ni se pare de prisos.

[1] Ibidem, p. 47 (cu modificările noastre).

existente își pun această problemă, căci fiecare acceptă în prealabil *existența* și *gîndirea* și abia prin răspuns ele spun ceva cu privire la natura existenței și a gîndirii, separîndu-se astfel una de alta în filozofii idealiste sau materialiste. Pe de altă parte, problema fundamentală are două laturi: una se referă la *primatul* ce se poate stabili în raportul dintre existență și gîndire, alta la cunoaștere. De ce s-a oprit Engels asupra celor două laturi? Fiindcă nici una dintre ele nu presupune cu necesitate pe cealaltă și de aceea ele constituie două probleme distincte. Nu este de ajuns să afirmi materialitatea lumii pentru a afirma implicit și posibilitatea cunoașterii ei; nu este de ajuns să afirmi posibilitatea cunoașterii pentru a afirma însăși materialitatea ei.

Definiția adevărului se dă la nivel ontologic, prin raport cu existența în genere, și nu la nivelul unei linii filozofice determinate, nu în raport cu existența materială sau ideală. De aceea vedem în afirmația că din definiția adevărului decurge atitudinea materialistă a lui Aristotel o afirmație puerilă, deoarece se caută problema acolo unde ea nu apare. Cînd vorbim de *adevărul obiectiv*, înțelegem prin aceasta faptul că existența lucrului este ceva diferit de existența enunțului și că existența lucrului determină adevărul enunțului. Prin aceasta încă n-am spus nimic precis despre natura ideală sau materială a acesteia. Vom defini materia prin existența unei realități 1) în afara noastră; 2) independentă de noi și 3) guvernată de legi, și nu este suficient să spunem că existența poate să fie (și este) cunoscută, deci că putem stabili adevăruri, pentru a trage concluzia că existența cunoscută este de natură materială. Căci în definitiv și Berkeley ar putea spune: „Și eu admit cunoașterea unei realități independente de noi, dar aceasta este... dumnezeu".

O a doua problemă deosebit de importantă care se pune în legătură cu definiția adevărului este următoarea: *a fi adevărat* este sinonim cu *a ști că este adevărat*? Cu alte cuvinte, enunțul „*X* este adevărat" este sinonim cu „este stabilit pe baza unui criteriu (printr-un procedeu oarecare) că *X* este adevărat?" Această problemă este atît de importantă și are consecințe atît de radicale pentru reconstrucția logicii și pentru dezvoltarea filozofiei, încît este de mirare ușurința cu care este expediată de *majorita-*

tea filozofilor. În ce-l privește pe Aristotel, nu există în *Metafizică* o părere clară cu privire la faptul dacă trebuie sau nu să identificăm ideea de „a fi adevărat" cu ideea de „a ști că este adevărat". Din definițiile date însă decurge că el nu pune în dependență *adevărul* de *conștiința adevărului*. Tot din definițiile date decurge că el nu pune în dependență analitică (definitorie) ideea de adevăr de ideea de *criteriu al adevărului*. În *Organon I, Despre interpretare*, § 9, 19 a, Aristotel distinge însă net între „a fi adevărat" și a putea „spune precis" dacă este adevărat (p. 228).

Să analizăm în principiu această problemă (în prima formulare). Să presupunem că enunțurile sînt adevărate numai dacă noi știm acest lucru (adică adevărul unei propoziții ar fi dependent de faptul că noi putem decide asupra acestui lucru). În acest caz se cere să explicăm unele dificultăți.

Considerăm propoziția (1): „La 2 mai anul 2000 î.e.n., faraonul Egiptului a v´nat un crocodil pe malul Nilului". Presupunem că faptul a avut loc în realitate, ceea ce evident nu este exclus. Este un lucru cert însă că cel puțin deocamdată (și după toate probabilitățile niciodată) nu vom putea să decidem dacă faptul a avut sau nu loc, deci nu vom putea să spunem dacă propoziția de mai sus este adevărată sau nu. Deoarece nu vom ști cu certitudine că faptul a avut loc, urmează că propoziția (1) trebuie să fie declarată cel puțin ca neadevărată. În acest caz ar trebui să aducem un amendament la definiția dată de Aristotel, definiție care cel puțin în intenția ei a fost preluată de materialismul dialectic. Observațiile de mai sus privesc și asertiunile asupra viitorului. Propoziția (2): „În anul 2000 va fi scris romanul cu titlul *Cosmos*" nu poate fi supusă deciziei în momentul de față (propoziția (1) ar fi etern indecidabilă, iar propoziția (2) temporar indecidabilă). Sfera conceptului de adevăr s-ar restrînge în acest caz la sfera propozițiilor decidabile. Acest mod de a trata lucrurile nu ne-ar duce însă cu nici un pas înainte. Complicațiile care ar surveni ar fi foarte grave. În fapt însă noi am ocoli problemele. Și iată de ce: a) vor rămîne propoziții care vor corespunde realității, dar pe care ar trebui să le eliminăm din sfera conceptului de adevăr („adevărul" n-ar avea sens în raport cu ele); b) restricțiile pe care le-am face ar avea consecințe grave

pentru reconstrucţia logicii formale; c) conceptul de adevăr ar exprima două raporturi: un raport cu stările de fapt (cu existenţa) şi un raport cu conştiinţa (conştiinţa corespondenţei dintre enunţ şi starea de fapt); or, aceasta arată că raportul corespondenţei tot nu poate fi ocolit; d) ar trebui, prin urmare, să găsim un nou termen pentru raportul de corespondenţă dintre propoziţie şi realitate. Logica propoziţiilor nedecise ar rămîne neelucidată. Ca rezultat am avea deci doar un termen nou!

Din cele de mai sus rezultă că nu este raţională restricţia respectivă. Acestea sînt argumentele pur teoretice. Există însă un argument de natură practică care ar pleda, cel puţin aparent, pentru restricţia respectivă. Se pune întrebarea: *ce utilitate mai au propoziţiile despre care (fie şi la un moment dat doar) nu putem spune dacă sînt adevărate*? Nu cred că acest argument este prea solid, căci problema utilităţii este pusă aici într-un mod unilateral. În acest caz s-ar pune problema distingerii pur și simplu în sfera conceptului de adevăr: propoziţiile adevărate nedecise ar urma să fie „adevărate în sine", iar propoziţiile cunoscute ca adevărate ar urma să fie „adevărate pentru noi". Această distincţie o face, de exemplu, profesoara S.A. Ianovskaia: „Căci *adevărul pentru noi* este corespondenţa cu realitatea (materială) (!) verificată în practică"[1]. Propoziţiile adevărate pentru noi ar mai putea să fie numite cu un termen comun „cunoştinţe".

O deosebire riguroasă între adevăr şi cunoştinţă face, de exemplu, R. Carnap în studiul *Truth and Confirmation*. Carnap cere să distingem între două tipuri de enunţuri, pe care le exemplifică astfel: 1) enunţul „substanţa din acest vas este alcool" este propoziţie adevărată; 2) X ştie că enunţul „substanţa din acest vas este alcool" este propoziţie adevărată.

Să atacăm această problemă din punct de vedere logic. Logica clasică admite printre principiile sale şi pe următorul $\overline{\overline{A}} \rightarrow A$ (legea dublei negaţii). Să presupunem că prin definiţie *adevăr* înseamnă cunoştinţă. Fie o propoziţie $\overline{X}$ (non-X), unde negaţia are sensul de „X nu este adevărată", adică „X nu este cunoştinţă" (conform cu definiţia). Fie apoi o negare a lui $\overline{X}$, deci $\overline{\overline{X}}$, ceea ce înseamnă

[1] Vezi Hilbert şi Ackermann. Op. cit., trad. rusă, Moscova, 1947, comentarii de S.A. Ianovskaia, p. 234 (subl. ns.).

„X nu este o cunoştinţă". Conform cu dubla negaţie, ar rezulta că X este o cunoştinţă. Or, evident, aşa ceva nu poate rezulta. Într-adevăr, să aplicăm raţionamentul de mai sus la un exemplu:

1) „$x^n + y^n = z^n$" nu este o cunoştinţă;

2) enunţul 1) nu este o cunoştinţă (acest enunţ reprezintă dubla negaţie a enunţului „$x^n + y^n = z^n$").

Din 2) nu se poate deduce că $x^n + y^n = z^n$ este o cunoştinţă. Aşadar, legea dublei negaţii nu se poate aplica la astfel de enunţuri-cunoştinţe. Din punctul de vedere al logicii, distincţia de mai sus este obligatorie.

A renunţa la conceptul de adevăr definit aşa cum s-a văzut mai sus ar însemna să renunţăm la însăşi logica clasică (bivalentă), logică ce se bazează tocmai pe conceptul aristotelic de adevăr. Dintr-un punct de vedere practic-constructiv, am văzut însă că o asemenea restricţie ar fi plauzibilă. O carte în care am avea numai enunţuri despre care nu ştim că sînt adevărate ar fi de prisos. Îmi aduc aminte de următoarele cuvinte ale lui Diderot: dacă dumnezeu ar fi descoperit „mecanismul universal" şi l-ar fi descris într-o carte, „credeţi oare că această mare carte ar fi mai de înţeles pentru noi decît însuşi universul?". Există şi o altă obiecţie: dacă adevărul este simplă corespondenţă fără relaţie cu conştiinţa, atunci maşinile care ajung prin deducţie la enunţuri noi de asemenea cunosc realitatea? La această obiecţie se poate răspunde simplu: „a cunoaşte realitatea" înseamnă „a avea cunoştinţe asupra realităţii" şi nu pur şi simplu „a forma propoziţii adevărate".

Am arătat mai sus că problema pusă are şi o altă formulare: *adevăr* înseamnă prin definiţie *adevăr verificat*?

În general se impune să analizăm următoarele tipuri de enunţuri valorice (enunţuri care informează asupra valorii propoziţiilor):

I. X este propoziţie adevărată;

II. X este propoziţie verificată;

III. X este cunoştinţă;

IV. A a verificat că X este propoziţie adevărată;

V. A ştie că X este propoziţie adevărată (sau A are cunoştinţa X).

Diferența dintre un enunț de tipul I și unul de tipul II este clară: propoziția poate corespunde realității fără ca ea să fie încă verificată. Între enunțurile II și III există următoarele diferențe: a) enunțul II nu presupune în definiția sa existența conștiinței și în acest sens are caracter obiectiv; dimpotrivă, enunțul III presupune în definiția sa existența conștiinței și în acest fel este subiectiv (deși nu psihologic); b) enunțul II este prim față de enunțul III ceea ce se poate reda astfel: „X este cunoștință dacă și numai dacă X este verificat". Enunțurile IV și V sînt enunțuri individuale, enunțul IV fiind obiectiv, iar V psihologic (se presupune relația cu o conștiință individuală). Avînd în vedere deosebirile semnalate mai sus, cred că este necesar să discutăm puțin aparte formularea „adevărat = verificat ca adevărat".

În limitele *cunoașterii*, o asemenea identificare se face totdeauna, deoarece noi nu putem afirma că am cunoscut un lucru dacă n-am verificat aserțiunile noastre despre el. În acest sens este justificată expresia: „cunoaștem adevărul despre...". Cu toate acestea, vom arăta că identificarea de mai sus nu este permisă în genere, deoarece ea duce la sacrificarea totală a logicii bivalente. Analizăm mai îndeaproape această problemă.

Fie simbolurile: v (adevăr), f (fals), W (verificat), F (respins), p, q,... (propoziții) și $\vee$, —,; ,$\rightarrow$ (simbolurile cunoscute din logica propozițiilor). Logica definită pe valorile (v, f) admite, printre altele, următoarele legi logice importante:

1) $p \vee \bar{p}$ (legea terțului exclus);

2) $\overline{p . \bar{p}}$ (legea noncontradicției);

3) $\bar{\bar{p}} \rightarrow p$ (legea dublei negații).

Aceste legi pot fi formulate și cu ajutorul valorilor logice „adevăr" (v) și „fals" (f), considerate ca predicate care se aplică propoziției p, astfel „$v\ (p)$" și „$f\ (p)$", adică „p este adevărat" și, respectiv, „p este fals"*. Vom avea corespunzător:

1) $v(p) \vee f\ (p)$ („p este sau adevărat sau fals");

2) $\overline{v\ (p) . f\ (p)}$ („nu are loc p este adevărat și p este fals");

---

* În formulările care urmează litera „p" este luată in *suppositione materiali* (ca nume al propoziției). La fel și în alte cazuri în care se aplică predicatele de valoare (v, f, ș.a.).

3) $\overline{f(p)} \rightarrow v(p)$ („dacă nu este adevărat că este fals p, atunci el este adevărat");

În definitiv putem suprima total semnul negației astfel:

2) $f[v(p) \cdot f(p)]$ („este fals că p poate să fie și adevărat și fals");

3) $f(f(p)) \rightarrow v(p)$.

Să presupunem în continuare că variabila „p" ia valori din domeniul (W, F). Să presupunem, de asemenea, că cele trei legi rămîn valabile și în această interpretare:

$W(p) \vee F(p)$ („p este verificat sau p este respins");

$F[W(p)) \cdot F(p)]$ („este respins că p este și verificat, și respins");

$F(F(p)) \rightarrow W(p)$ („dacă este respins că p este respins, atunci p este verificat").

În realitate, avem cazuri cînd terțul exclus nu se aplică la acest nivel. Considerăm propoziția „există viață pe planeta Marte", ea nu este în momentul de față nici verificată, nici respinsă. Formula noncontradicției, în schimb, își păstrează valabilitatea, căci nu există o astfel de propoziție care să fie dovedită ca adevărată și în același timp respinsă.

Este suprimată legea dublei negații, căci din faptul că infirmăm (respingem) respingerea unei propoziții nu decurge că am dovedit adevărul ei.

Alfred Tarski observă pe bună dreptate, discutînd definiția adevărului, că „acest principiu (al terțului exclus. — *G.E.*) nu are semnificație în domeniul propozițiilor verificate". Am văzut că la fel stau lucrurile cu dubla negație. Sfera noțiunii „adevărat" este mai largă decît sfera noțiunii „verificat". „În acest fel, definiția propoziției adevărate... trebuie să cuprindă și propozițiile neverificate"[1]. Tocmai aceasta este și concluzia noastră, ceea ce s-a dovedit mai sus. Este clar deci că acei autori care includ în definiția adevărului și criteriul adevărului definesc nu conceptul de „adevăr", ci conceptul de „adevăr verificat" sau de „cunoștință". Desigur, noi nu putem interzice oamenilor ca în

---

[1] Alfred Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford. At the Clarendon Press, 1956, p. 79.

dependenţă de necesitatea obiectivă să opereze cu o logică bivalentă sau în general *n*-valentă; totul este să se facă distincţie şi operarea să fie corectă. Din aceleaşi motive, motive riguros întemeiate, respingem şi substituirea conceptului de adevăr cu conceptele particulare de „adevăr verificat", şi anume cu „formal verificat" (= coerent) sau „practic verificat" (= experimentat). Despre aceste confuzii vom avea ocazia să mai discutăm în unele paragrafe speciale.

O a treia problemă privitoare la definiţia adevărului este *problema raportului dintre conceptul de adevăr şi conceptul de formă logică*. Reamintim că după logica generală există trei forme logice: noţiunea, judecata şi raţionamentul. Deoarece definiţia „noţiunii" n-a fost dată niciodată prea precis în logica generală, raportul dintre aceste trei forme logice a rămas şi el neelucidat. De obicei se consideră că ea este cea mai simplă formă de gîndire, prin faptul că joacă rol de termen în judecată. Să considerăm judecata: „Trandafirul este o plantă". Se afirmă că într-o asemenea judecată se raportează o noţiune-subiect („trandafirul") la o noţiune-predicat („planta"). Ar reveni atunci că noi folosim cuvintele „trandafir" şi „plantă" pentru a afirma legătura între două noţiuni. Mai dezvoltat aceasta ar însemna că noi afirmăm legătura dintre mulţimea judecăţilor care formează noţiunea de *trandafir* (fie $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$) cu mulţimea judecăţilor care formează noţiunea *plantă* (fie $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$). Or, e evident că „este" în acest caz n-ar mai avea sens, căci cum ar putea o mulţime de judecăţi să fie o altă mulţime de judecăţi? Trebuie deci să renunţăm la ideea că judecata ar însemna asertarea unei legături între noţiuni. O judecată este o aserţiune *despre obiecte* şi nu despre noţiunea obiectelor respective. Cu alte cuvinte, noi folosim *termenii* „trandafir" şi „plantă" ca *nume* ale obiectelor pentru a vorbi despre obiecte şi nu despre... noţiunea obiectului respectiv. Vorbim despre obiectul *trandafir* afirmînd că el are proprietatea de *a fi plantă*. Formînd judecata: „Trandafirul este o plantă", gîndul ne este îndreptat *spre obiect* şi nu *spre conceptul obiectului*, ceea ce ar însemna o metajudecată. Acest lucru este şi mai de înţeles în judecăţile imperative. Cînd spun „dă-mi un pahar de apă!", aceasta nu înseamnă „dă-mi *no-*

țiunea paharului de apă!". La fel, cînd spunem „studenții au nevoie de cursuri", aceasta nu se poate traduce prin „noțiunea de *studenți* se află în relația *X* cu noțiunea de *cursuri*". Într-o judecată noi nu raportăm o noțiune la alta, ci exprimăm raporturi dintre obiecte sau obiecte și proprietăți. Confuzia de nivele este evidentă: a vorbi (a aserta) despre obiecte se confundă cu a vorbi (a aserta) despre conceptul obiectelor. Cînd vrem să ne referim la o noțiune, noi folosim cuvinte izolate sau grupe de cuvinte, dar aceasta nu înseamnă că trebuie să avem în vedere noțiunea ori de cîte ori folosim cuvîntul. Să considerăm cuvîntul „om". El poate fi utilizat în contexte diferite cu funcții diferite, ca de exemplu: a) a vorbi despre ființa *om*, b) a vorbi despre conceptul „om", și c) a vorbi chiar despre cuvîntul „om". Astfel, „omul este" un animal rațional", „omul are o sferă mai largă decît europeanul" ,„om are alt sens decît bărbat". În aceste expresii n-am indicat la ce anume ne referim (obiect, concept sau cuvînt), ci am lăsat totul pe seama contextului. Așa cum a arătat Tarski, în limba obișnuită există adesea confuzii de nivele.

Din cele de mai sus decurge că trebuie să renunțăm la ideea conform cu care noțiunea ar fi cea mai simplă formă de gîndire. De asemenea nu se știe ce vor să spună unii logicieni care fac din noțiune „o virtualitate de judecăți".

Să încercăm, așadar, să vedem ce este *noțiunea**. În definirea *noțiunii* trebuie să plecăm de la a explica ce înțelegem prin afirmația atît de banală „avem noțiunea obiectului". Ce înseamnă deci „a avea noțiunea a ceva (sau despre ceva)"? Nu înseamnă oare să știm ceva despre obiectul respectiv, adică faptul că obiectul este în cutare și cutare fel, că are cutare și cutare proprietăți? Cînd avem o noțiune despre *globul pămîntesc*: oare nu atunci cînd știm că are o formă geoidă, că se învîrtește în jurul Soarelui etc. etc.? Ce înseamnă *a ști că are o formă geoidă* dacă nu a avea judecata verificată: „Pămîntul are o formă geoidă"? Putem noi pretinde că avem o noțiune despre un obiect dacă nu avem astfel de judecăți verificate (cunoștințe) despre obiectul respectiv? Nu

* Definiția care se dă adesea noțiunii ca fiind „reflectarea notelor generale și esențiale ale obiectelor" este insuficientă, deoarece exclude din sfera definiției a) *noțiunile individuale*, b) *noțiunile vide*, c) *noțiunile care se află într-un stadiu rudimentar de dezvoltare*.

s-ar confunda atunci noţiunea obiectului cu produsele purei imaginaţii? De exemplu, dacă nu s-ar impune să avem astfel de judecăţi verificate, n-ar rezulta că ceea ce numim „centaur" este în aceeaşi măsură obiect de cunoaştere ca şi ceea ce numim „cal"? Pe de altă parte, ar trebui să excludem din rîndul noţiunilor noţiunea „centaur" din moment ce o noţiune trebuie să fie neapărat noţiunea unui obiect? Cu toate acestea, noi spunem că „centaur" este în aceeaşi măsură noţiune ca şi „cal". Este drept că prima este o noţiune vidă (fără obiect), iar a doua o noţiune reală. Dacă în cazul „centaurului" nu putem spune că avem judecăţi verificate (cunoştinţe), putem reţine că avem o descriere (tot sub formă de judecăţi) a *presupusului* obiect. În orice caz, indiferent despre ce fel de noţiuni ar fi vorba, ele sînt o mulţime de judecăţi despre un obiect *real* sau *presupus*. Aşadar, departe de a fi cea mai simplă formă de gîndire, noţiunea este cea mai complexă. Apare acum şi mai evident că n-are sens să afirmăm că termenii judecăţii sînt noţiuni. Deoarece judecăţile se pot afla între ele în anumite relaţii logice, care pot merge de la simple raţionamente (de două sau trei judecăţi) pînă la sisteme deductive, noţiunea cuprinde evident şi raţionamentul ca mod de a lega judecăţile una de alta. *Judecata este însă actul elementar de gîndire şi deci, atunci cînd cercetăm problema adevărului, trebuie, fireşte, să începem cu ea.* Cercetarea adevărului celorlalte forme trebuie făcută în funcţie de judecată, ceea ce am şi făcut atunci cînd am vorbit de raţionament. Cu privire la adevărul noţiunilor, lucrurile stau mult mai complicat. În orice caz, aici trebuie să apelăm la anumite consideraţii prealabile. Va trebui să distingem, de exemplu, între *conceptul adevărat*, care constă numai din propoziţii verificate, *conceptul general* al obiectului, care cuprinde tot felul de judecăţi despre obiect, *conceptul logic fals* (contradictoriu), *conceptul empiric fals* (conţine judecăţi empirice false) şi *concepte imaginate plauzibile*, dar vide. Desigur, problema adevărului conceptelor este mult mai complicată decît problema adevărului judecăţii, dar ea este funcţie de aceasta din urmă.

Înainte de a încheia discuţia acestei probleme, vom mai remarca faptul că se poate da o definiţie a adevărului fără a speci-

fica forma de gîndire, ceea ce se şi face în mod obişnuit. Vom numi această definiţie „neconstructivă"*, spre deosebire de definiţia care porneşte de la judecată şi pe care o vom numi „constructivă". Fără a nega valoarea definiţiei neconstructive, noi vom pleda totuşi pentru una constructivă, singura în stare să dezvolte o epistemologie cu adevărat la nivelul ştiinţelor contemporane.

A patra problemă pe care vrem s-o abordăm este următoarea: este adevărul proprietate sau raport? Pare oţioasă la prima vedere şi totuşi ea are o importanţă de principiu. Într-adevăr, dacă adevărul ar fi o simplă proprietate a ideilor noastre şi nu un raport între idei şi obiecte deosebite de ele, de aici pînă la idealismul subiectiv n-ar mai fi decît un pas formal. În lucrarea sa *Introducere în semantică*, R. Carnap vorbeşte despre un tip special de proprietăţi, şi anume „proprietăţi derivate de la relaţii". Este ceva aproape sinonim cu predicatele n-adice din calculul predicatelor. Dacă noi vom nota propoziţia (judecata) cu p şi starea de fapt pe care o descrie cu φ, atunci am putea să reprezentăm adevărul în felul următor: $R(p, \varphi)$. Această relaţie specială $R(p, \varphi)$ poate fi notată pe scurt cu ajutorul cuvîntului „adevăr" sau cu simbolul v.

Termenul de „adevăr" sau expresia „propoziţia este adevărată" — simbolic $v(p)$ — exprimă în fapt relaţia $R(p, \varphi)$ sau, în cuvinte, proprietatea „a fi în corespondenţă cu starea de fapt φ" (în terminologia obişnuită „a fi în corespondenţă cu realitatea"). Explicaţia predicatului „adevărat" poate fi dată încă şi altfel, şi anume astfel că ideea de relaţie este cu totul mascată. Să considerăm propoziţia următoare: „Parisul este capitala Franţei". Ideea că această propoziţie este *adevărată* poate fi exprimată în două moduri: a) propoziţia „Parisul este capitala Franţei" *corespunde realităţii* (ca mai sus), b) *are loc faptul* că Parisul este capitala Franţei. Din punct de vedere logic nu cred că are vreo importanţă deosebirea dintre a spune „propoziţia

* Termenul de „constructiv" are în vedere faptul că numai o asemenea definiţie poate sta la baza rezolvării problemei adevărului (a verificării).

corespunde realității" și „faptul descris are loc". Sînt două explicații posibile și deopotrivă admisibile. Din punct de vedere filozofic însă, o cercetare mai detaliată a raportului se impune. Distincțiile următoare sînt importante: confruntarea lui p cu domeniul faptelor și găsirea în domeniul faptelor a faptului φ (faptul descris). Cînd vorbim despre aceea că p corespunde realității, aici se presupune deja că noi am găsit în această realitate faptul φ, deși nu spunem aceasta direct. Cînd spunem că „φ are loc", noi presupunem deja că am confruntat p cu domeniul faptelor, deși nu exprimăm aceasta în mod direct. Explicarea acestor presupuneri neexprimate este simplă: afirmarea relației presupune afirmarea termenilor și, invers, afirmarea unui termen prin raport cu altul presupune afirmarea raportului. În orice caz, relația de *corespondență* rămîne în centrul ideii de *adevăr*. Putem numi adevărul o „proprietate", însă explicațiile date mai sus trebuie avute în vedere.

Unii dintre filozofii noștri preferă în locul termenului de „corespondență" termenii de „reflectare justă" sau „reflectare adecvată". Personal nu am nimic împotrivă, însă consider că acești termeni sînt departe de a fi primitivi. Ei se cer explicați și explicația nu poate fi dată altfel decît prin intermediul termenului de „corespondență", care este într-adevăr primitiv în acest caz.

O a cincea problemă la care ne propunem să răspundem este următoarea: *aparține adevărul propoziției sau judecății*? Termenul de „propoziție" are două înțelesuri: unul gramatical și unul logic. Forma gramaticală în care se exprimă o judecată este *propoziția gramaticală*. Propoziția gramaticală considerată împreună cu informația (judecata) pe care o cuprinde este propoziția în sens logic. Se înțelege că, în raport cu simpla propoziție gramaticală, n-are sens să vorbim de adevăr. Problema adevărului se pune în raport cu propoziția logică și cu judecata. Din acest punct de vedere vom spune că propoziția (în sens logic) este adevărată dacă este adevărată informația (judecata) pe care o cuprinde. Nu considerăm deci că este vreo greșeală în a spune „propoziția este adevărată" sau că „judecata este adevărată".

b) *Alte definiţii ale adevărului*

În paragraful de mai sus am analizat conceptul de adevăr-corespondenţă şi unele probleme generale ale definiţiei adevărului. După Aristotel au apărut şi alte concepte de adevăr. Stoicii au fost partizanii unei logici bivalente stricte. Scolasticii au reluat concepţia lui Aristotel, dar într-o formă mai puţin clară (adevărul este *adequatio rei et intellectus)*. Renaşterea renunţă la distincţii logice şi confundă aproape unanim *adevărul* cu *cunoştinţa* (în particular cunoştinţe experimentale). Pentru oamenii Renaşterii, important este nu adevărul abstract, ci adevărul concret, verificat în experienţă (cunoştinţe experimentale). Nu întîmplător în această perioadă s-a dezvoltat ideea de *metodă*. Iar metoda în concepţia filozofilor Renaşterii înseamnă *procedeu de dobîndire a cunoştinţelor, procedeu de deosebire a adevărului de fals*. Ideea după care adevărul „pentru noi" (cunoştinţa) se leagă de un oarecare procedeu (metodă) în afara căruia noi nu atingem cunoaşterea realităţii este o idee măreaţă a epocii Renaşterii. Ideea de criteriu (procedeu) de verificare este inclusă permanent în ideea de adevăr. Descartes defineşte adevărul prin calităţile subiective care îl deosebesc de fals. El va spune: „*Verum est quod clare ac distincte percipio*". Vom analiza pe scurt ideea de „adevăr-evidenţă" a lui Descartes. Descartes, considerînd *evidenţa* ca unica proprietate distinctivă a adevărului, reduce ideea de adevăr la o simplă proprietate psihologică. De unde provine această idee de evidenţă? Multe dintre propoziţiile matematicii creează această *impresie de clar şi indiscutabil adevărat*. Tocmai această impresie poartă numele de „evidenţă". Deoarece matematica era singura ştiinţă indiscutabilă pe vremea lui Descartes şi deoarece toate propoziţiile matematicii păreau a avea calitatea de a fi evidente, Descartes consideră că nu avem altă cale de a distinge propoziţiile adevărate de cele false decît *evidenţa*. Istoria matematicii din ultimul veac a arătat însă cît de şubredă este această bază. După Descartes a continuat procesul de introducere a unor noţiuni derivate ale adevărului. Astfel, Leibniz distinge între „adevărul de raţiune" şi „adevărul de fapt", Kant distinge între „adevărul formal" şi „adevărul material". Logica modernă a

împins în primul plan distincția dintre „adevărul analitic" și „adevărul sintetic". Asemenea concepte particulare își pot găsi justificarea numai dacă: se recunoaște în ultimă instanță rolul prim al experienței și un concept unic, fundamental de adevăr (conceptul de adevăr-corespondență). Absolutizarea conceptelor particulare de adevăr duce în ultimă instanță la idealism, cum, de exemplu, se întîmplă în pragmatism. Este cazul aici să luăm în discuție din punct de vedere logic noțiunea de „adevăr-utilitate" a pragmatiștilor.

Definiția adevărului în concepția pragmatiștilor este următoarea: *ideea este adevărată dacă și numai dacă este utilă*. Această idee fundamentală se asociază cu altele trei:

a) criteriul *utilității* este practica; dacă ideea ne ajută să dobîndim succese în practică, aceasta înseamnă că ea este utilă și deci adevărată;

b) pînă la existența omului nu exista nici o lume (= nu există adevăr obiectiv); lumea se constituie în practică o dată cu adevărul;

c) din cele de mai sus decurge că ceea ce oamenii numesc de obicei „adevăr" și „fals" pot să fie identice dacă găsim vreo utilitate în judecățile contradictorii. Dar concepția pragmatiștilor se poate îndrepta împotriva sa însăși: ea este falsă dacă se dovedește inutilă. Într-adevăr, istoria a arătat că ea este inutilă din punctul de vedere al omenirii progresiste, și chiar dăunătoare.

c) *Considerații asupra unor concepte particulare de adevăr*

Istoria filozofiei și logicii, mai ales de la Descartes încoace, a oscilat mereu între două tipuri de adevăruri: adevărul decis prin experiență și adevărul decis cu mijloace logice. Este de fapt expresia concentrată a două concepții filozofice: raționalismul și empirismul. Indiferent ce nume vor purta ele mai tîrziu și indiferent de sfera ce li se va atribui, este totdeauna vorba de „adevăruri raționale" (distinse cu mijloace logice) și „adevăruri experimentale" (distinse pe cale experimentală). Leibniz le va numi „de rațiune" și „de fapt", Kant le va numi „apriorice" și „a-posteriorice", iar Carnap și alții „analitice" și „sintetice". Pentru

Leibniz vor fi adevăruri necesare acelea care se întemeiază exclusiv pe principii logice, şi în primul rînd pe principiul identităţii şi noncontradicţiei.

Pentru Kant vor fi adevăruri apriorice legile logicii formale şi propoziţiile matematicii pure, iar cele dependente de experienţă aposteriorice. Pentru Carnap şi alţii vor fi analitice (sau logice) toate adevărurile deduse numai pe baza legilor logice *(legea logică* avînd o sferă mai largă decît la Leibniz); restul vor fi adevăruri sintetice.

Eu cred că deosebirea dintre cele două tipuri de adevăruri este admisibilă, dar trebuie să ţinem seama că ea este doar relativă. Ea poate fi acceptată cu condiţiile ca să se aibă în vedere că criteriul fundamental al adevărului este practica şi că nu există verificare „pur practică" fără intervenţia raţiunii şi nu există verificare „pur logică" fără apel, în ultimă instanţă, la practică. Asupra acestor probleme vom mai reveni în alt paragraf al acestui capitol. Amintim de asemenea că în logica matematică *adevărul* şi *falsul* sînt tratate ca două „obiecte abstracte", adică două obiecte care satisfac anumite relaţii (de exemplu relaţiile algebrei booleene).

d) *Definiţia adevărului în limbile formalizate (concepţia lui Tarski)*

Limbile naturale, prin însăşi funcţia lor, au o elasticitate care tinde să îmbrăţişeze fluxul lucrurilor. În aceste limbi este greu să dăm formulări exacte, univoce. Aceasta din cauză că unul şi acelaşi cuvînt poate să aibă mai multe sensuri şi chiar mai multe funcţii. Nu este de mirare că mintea omenească a iscodit pentru domenii speciale ale cunoaşterii limbajuri de o natură deosebită, caracterizate prin economie şi precizie. Dacă în limbajurile naturale ne putem mulţumi cu formulări aproximative fără a evita prin aceasta riscul contradicţiilor, în limbajurile speciale, simbolice, trebuie prin definiţie să dăm formulări precise. La fel stau lucrurile şi cu definiţia adevărului. Problema aceasta de a cerceta definiţia adevărului prin raport cu limbajurile speciale („formalizate") şi-a pus-o logicianul polonez Alfred

Tarski. Tarski dezvoltă această concepţie în două studii: *Conceptul de adevăr în limbile formalizate* (studiu de factură tehnică) şi *Concepţia semantică a adevărului* (studiu de natură filozofică). În lucrarea de faţă nu vom intra în detaliile concepţiei lui Tarski, ci ne vom rezuma la problemele principale văzute din unghiul de vedere al acestei lucrări.

Vom începe cu primul studiu, *Conceptul de adevăr în limbile formalizate*. În rezumat, problemele pe care le conţine lucrarea lui Tarski sînt următoarele: cercetarea condiţiilor generale pe care trebuie să le îndeplinească definiţia conceptului de adevăr şi definiţia adevărului în diferite limbi formalizate. Lucrarea constă de fapt din două părţi: cercetarea definiţiei prin raport cu limbile naturale („universale") şi construirea definiţiei în limbile formalizate. Conceptul, sau, mai exact, termenul pe care vrea să-l definească Tarski, este acela de „propoziţie adevărată". Scopul cercetării este de a da o definiţie „formal corectă" şi „material adecvată" termenului de „propoziţie adevărată". Punctul de plecare îl constituie definiţia adevărului dată de Aristotel, pe care Tarski o reformulează astfel:

1. Propoziţia adevărată este acea propoziţie care spune că lucrurile *(state of affairs)* stau în cutare sau cutare fel şi ele *stau întocmai astfel*. Dacă „sensul intuitiv" şi „intenţia generală" ale acestei formulări sînt clare, formularea în schimb este nesatisfăcătoare. Trebuie dar să cercetăm mai îndeaproape condiţiile formulării. Pornind de la o propoziţie concretă oarecare (s-o notăm cu *X)*, noi trebuie să definim ce înseamnă că „*X* este propoziţie adevărată". De exemplu, ce înseamnă că propoziţia „zăpada este albă" este adevărată? Oricare ar fi propoziţia *X*, definiţia adevărului ei are următoarea schemă:

2. *X* este propoziţie adevărată dacă şi numai dacă *p*. Ne-am putea îngădui o simbolizare a acestei fraze în felul următor:

$$v\ (X) \rightleftarrows p.$$

În această schemă, *X* reprezintă numele propoziţiei iar *p* însăşi propoziţia. În al doilea rînd, avem termenul care trebuie definit („propoziţia adevărată") şi relaţia logică (o implicaţie exclusivă, „dacă şi numai dacă"). Conform cu această schemă,

se cere să putem construi *nume* pentru propoziţie şi să putem scrie propoziţia. Tarski cercetează două procedee de formare a numelor: procedeul numelor-ghilimele şi procedeul numelor structural-descriptive. Numele-ghilimele se formează introducînd propoziţia (gramaticală) în ghilimele. De exemplu, „zăpada este albă" este numele propoziţiei *zăpada este albă*. Numele structural-descriptiv constă în aceea că se descrie structura expresiei: numărul de cuvinte, literele din care constau şi ordinea lor. Fie din nou propoziţia *zăpada este albă*. Aplicînd schema definiţiei şi procedeele de denumire, definiţia adevărului acestei propoziţii capătă următoarele două forme:

3. „Zăpada este albă" este propoziţie adevărată dacă şi numai dacă *zăpada este albă*.

4. Expresia care constă din trei cuvinte, dintre care primul este constituit din şase litere: *z, ă, p, a, d, a,* al doilea din patru litere: *e, s, t, e* şi al treilea din patru litere: *a, l, b, ă,* este propoziţie adevărată dacă şi numai dacă *zăpada este albă*. O dată cu aceasta se pare că scopul a fost atins. Totuşi lucrurile nu stau astfel: formulările de mai sus aplicate la limbile naturale („universale" cum le mai numeşte Tarski) nu pot fi folosite fără a ajunge în anumite cazuri la contradicţii logice (antinomii). În particular Tarski arată că ele duc la antinomia de tipul mincinosului. Cauza acestor antinomii stă în caracterul „închis" al acestor limbi, iar acest caracter „închis" constă în aceea că în limbă nu se diferenţiază *între a vorbi despre ceva diferit dc limbă şi a vorbi despre expresiile limbii respective,* şi aceasta se explică prin universalitatea limbilor naturale: ele trebuie să includă tot ceea ce poate fi enunţat cu sens. Deoarece în limbile universale nu se poate da o definiţie cu care să se opereze fără a se ajunge la contradicţii, Tarski deplasează cercetarea pe terenul limbajurilor formalizate (= limbi construite după reguli precise şi cu ajutorul metodei deductive). Pentru aceasta el se opreşte la cel mai simplu limbaj: limbajul logicii claselor. De la început se introduce distincţia de nivel în limbaj. Vom avea, respectiv, limbajul despre clase (limbajul cercetat deci, ceea ce Carnap va denumi „limbajul-obiect") şi limbajul în care vorbim despre

acesta, „metalimbajul". Cu aceasta se înlătură caracterul închis al limbii.

Deoarece definiția adevărului se referă la expresiile din limbajul logicii claselor, este firesc ca ea să fie dată în metalimbaj. Cu scopul de a da o asemenea definiție, Tarski axiomatizează metalimbajul. Iată cum procedează. La început stabilește structura limbajului și a metalimbajului (expresii, reguli, definiții, axiome). Urmează apoi să fie satisfăcute condițiile pentru a se da definiția adevărului. Schema introdusă la început este și de astă dată în centrul atenției. Trebuie să formăm *nume* și *să putem scrie propoziția*. Ca procedeu de formare a numelor se alege procedeul structural-descriptiv (aplicat aici cu unele particularități). Întrucît avem de-a face cu metalimba, a putea scrie propoziția revine la a o putea traduce în metalimbă. Condițiile generale pe care trebuie să le îndeplinească definiția ce va fi dată sînt enunțate de Tarski astfel: a) să fie corectă metodologic (adică trebuie să fie formal-corectă și material-adecvată), b) să conțină toate cazurile particulare (adică trebuie să reprezinte produsul logic al tuturor cazurilor particulare) și c) în sfera acestei definiții trebuie să intre toate și numai acele propoziții care se obțin prin substituții în schema definiției.

Dar ce este o definiție material-adecvată? Acest concept este introdus printr-o „convenție" denumită „convenția *T*", care exprimă „condiția de adecvare". Notăm cu „*Tr*" clasa propozițiilor adevărate din sistemul logic *S*.

Convenția T. Spunem că definiția formal-corectă a simbolului „*Tr*" este definiția *adecvată* dacă din ea urmează logic toate propozițiile care se obțin din expresia „$x \in Tr$ dacă și numai dacă p" (schema de adevăr) pe calea substituirii unui nume structural-descriptiv din limba dată în locul lui x și a substituirii traducerii (în metalimbă) a propoziției în locul lui p. Schema de adevăr, procedeul denumirilor structural-descriptive și convenția *T* sînt primii pași spre îndeplinirea sarcinii propuse.

Apar însă două dificultăți, legate de ***numărul de variabile*** și de existența *funcției propoziționale*. Dificultățile legate de numărul de variabile se rezolvă prin aplicarea unor procedee recursive. În ce privește funcția propozițională, ea joacă un rol

central şi hotărîtor în construirea definiţiei adevărului. Rezolvarea dificultăţilor legate de funcţia propoziţională se face prin „reducerea" propoziţiilor la funcţii propoziţionale, respectiv prin tratarea propoziţiei ca un caz-limită (cazul în care numărul variabilelor libere este egal cu zero) al funcţiei propoziţionale. Deoarece funcţia propoziţională nu este nici adevărată, nici falsă, ci doar realizabilă, va trebui înainte de a defini adevărul să definim conceptul de „realizabilitate" (satisfacere), iar prin intermediul acestuia, ca un caz-limită, conceptul de adevăr. Tarski arată cum se defineşte conceptul de realizare, după care dă următoarea definiţie conceptului de adevăr:

Df. 23: x este propoziţia adevărată — în simboluri $x \in Tr$ — dacă şi numai dacă $x \in S$ şi orice serie infinită realizează pe x. Aici x este numele funcţiei propoziţionale, Tr reprezintă mulţimea propoziţiilor adevărate, iar S sistemul considerat (logica claselor).

După definirea conceptului de adevăr în limbajul claselor Tarski cercetează problema adevărului în limbajuri mai complicate (de „ordin" mai înalt). În primul rînd, el procedează la o clasificare a expresiilor limbii cu ajutorul ideii de *categorie semantică* şi de *ordin*. Categoria semantică este ceva asemănător cu „partea de vorbire" din gramatică. De exemplu, expresiile $F(x)$, $G(y)$ etc. sînt de aceeaşi categorie semantică, o altă categorie e formată din expresii ca $F(x, y)$, $G(x, y)$ etc. (în termenii noştri acestea sînt expresii cu aceeaşi structură logică). De asemenea, avînd în vedere că unele expresii cuprind pe altele, ca de exemplu $\psi (F(x))$, şi că unele expresii sînt *despre* altele, ca de exemplu, *numele* unei expresii date, Tarski reglementează ierarhia expresiilor prin ideea de ordin (fiecărui ordin îi corespunde un număr 1, 2, 3,..., n,...). Metalimba trebuie să aibă totdeauna un ordin mai înalt decît limba obiect. În funcţie de ordinul variabilelor, limbile sînt de ordin finit şi de ordin infinit. Metoda de a defini conceptul de adevăr în limbile de ordin finit este în general aceeaşi cu aceea aplicată în limbajul claselor: se defineşte mai întîi conceptul de realizare, apoi, ca un caz-limită al acestuia, conceptul de adevăr. În ce priveşte limbile de ordin infinit (de exemplu limbajul general al claselor), această metodă

nu mai poate fi aplicată, deoarece nu putem construi o limbă de ordin mai înalt (deci o metalimbă) decît ordinul infinit. Tarski mai arată apoi că metoda folosită de el pentru definirea conceptului de adevăr poate fi aplicată şi altor concepte semantice (de exemplu desemnarea, definiţia). Iată cum îşi rezumă Tarski rezultatele sale la sfîrşitul studiului amintit (publicat în 1932): „Principalele rezultate ale acestui articol pot fi însumate în următoarele teze:

A. *Pentru orice limbaj formalizat de ordin finit se poate construi în metalimbaj o definiţie formal corectă şi material adecvată pentru propoziţia adevărată, utilizînd expresii de formă logică generală, expresii ale limbajului însuşi ca şi termeni aparţinînd morfologiei limbajului, adică nume ale expresiilor lingvistice şi ale relaţiilor structurale care există între acestea.*

B. *Pentru limbajurile formalizate de ordin infinit, construcţia unei asemenea definiţii este imposibilă.*

C. *Pe de altă parte, chiar cu privire la limbile formalizate de ordin infinit, o folosire consistentă şi corectă a conceptului de adevăr devine posibilă prin includerea acestui concept în sistemul conceptelor primitive ale metalimbii şi determinarea proprietăţilor sale fundamentale cu ajutorul metodei axiomatice* (chestiunea dacă teoria adevărului stabilită în acest mod nu conţine contradicţii rămîne pentru prezent nedecisă)"[1]. Aceste propoziţii sînt generalizate pentru alte concepte semantice.

Într-un postscriptum care apare în ediţia 1956 a studiului amintit (în culegerea citată apărută la Oxford), autorul modifică întrucîtva concluziile A şi B. Iată formulările modificate:

„A. *Pentru orice limbaj formalizat se poate construi în metalimbaj o definiţie formal corectă şi material adecvată a propoziţiei adevărate numai cu ajutorul expresiilor logice generale, al expresiilor limbajului însuşi şi al termenilor din morfologia limbajului, dar sub condiţia că metalimbajul posedă un ordin mai înalt decît limbajul care este obiect de investigaţie.*

B. *Dacă ordinul metalimbajului este cel mult egal cu acela al limbajului însuşi, o astfel de definiţie nu poate fi construită*"[2].

---

[1] A. Tarski. *Op. cit.*, p. 265–266.
[2] Ibidem, p. 273.

După cîte se observă, Tarski nu se mai referă la limbile de ordin infinit în mod direct, ci la faptul că, fără o metalimbă de ordin mai înalt decît al limbii obiect, definiția respectivă nu poate fi dată. În 1932 el arăta că un exemplu de astfel de limbă este aceea de ordin infinit. Acum el reține condiția și renunță la exemplu.

Problemele pe care le pune expunerea lui Tarski sînt numeroase. O parte dintre ele au fost abordate în studiul nostru *Concepția lui Tarski despre adevăr în limbile formalizate* („Revista de filozofie", nr. 6, 1964). Fără a intra în detalii, vom reaminti unele dintre observațiile noastre și vom dezvolta altele noi.

În problema denumirilor am arătat că este un fapt elementar distincția dintre numele propoziției și propoziție. Este necesar ca atunci cînd vorbim despre propoziție să folosim nume speciale. Prin aceasta nu înseamnă că proprietatea de adevăr este atribuită numelui, ci noi asertăm despre propoziție că este adevărată folosind numele ei. Așa cum scrie Tarski, „convenția fundamentală privind folosirea oricărei limbi cere ca în orice exprimare să presupunem că ea este numele obiectului și nu însuși obiectul"[1].

Interpretarea schemei definiției este o problemă deosebit de importantă. Am văzut că schema are forma unei judecăți ipotetice (implicații exclusive): „*X* este propoziție adevărată dacă și numai dacă *p*". Putem, gramatical, s-o scriem și astfel: „Dacă și numai dacă *p*, atunci *X* este propoziție adevărată". Se vede că „existența" lui *p* condiționează adevărul lui *X*.

Dar ce este *p*? Trebuie să distingem aici între propoziția *p*, al cărei nume este *X* și faptul (starea de fapt) despre care vorbește *p*.

Fie din nou exemplul următor: „Dacă și numai dacă *zăpada este albă*, propoziția «zăpada este albă» este adevărată". Această judecată ipotetică exprimă în fapt relația de condiționare a adevărului propoziției „zăpada este albă" de către faptul că *zăpada este albă*. Deoarece orice judecată ipotetică presupune că

[1] Vezi A. Tarski. *The Semantic Conception of Truth*, în H. Feigl și W. Sellars, eds., *Reading in Philosophical Analysis*, 1947, p. 55.

o „existență" condiționează pe alta, aici este vorba de faptul că o existență (obiectivă, extrapropozițională) condiționează calitatea propoziției (fapt ideal) de a fi adevărată. Așa după cum nu spunem „dacă *există* un corp scufundat în apă *există* și o pierdere din greutatea lui egală cu greutatea volumului de lichid dezlocuit", ci pur și simplu „dacă un corp este scufundat în apă, atunci el pierde o parte din greutatea sa egală cu greutatea volumului de lichid dezlocuit", la fel nu spunem „dacă și numai dacă există faptul că *zăpada este albă*, atunci există și adevărul propoziției «zăpada este albă»", ci, „dacă și numai dacă *zăpada este albă*, propoziția «zăpada este albă» este adevărată". Existența este totdeauna presupusă într-o aserțiune, deși este posibil ca ea să nu fie enunțată. Tocmai de aceea schema lui Tarski este în fond sinonimă cu „*X* este propoziție adevărată dacă și numai dacă are loc *p*".

Analizînd problemele generale ale definiției adevărului, noi am arătat că o poziție gnoseologică justă încă nu spune ce „linie filozofică" acceptă autorul. Se poate spune că există un grad de „neutralitate" între poziția gnoseologică și poziția filozofică fundamentală; altfel spus, există o anumită „independență logică" între răspunsul ce se dă la prima latură a problemei fundamentale a filozofiei și cea de-a doua latură. Ele nu se implică reciproc. Se poate accepta o realitate obiectivă așa cum face Kant și să fii agnostic, după cum se poate recunoaște posibilitatea cunoașterii și să fii idealist, așa cum este Hegel. Materialismul dialectic însă este împotriva considerării „neutralității" gnoseologice drept o a treia linie fundamentală în filozofie. Despre aceasta vom vorbi însă mai departe. Este important să luăm în discuție o serie de obiecții care au fost aduse de pe diferite poziții studiului lui Tarski.

Unele dintre aceste obiecții au, ca să spunem așa, o natură logică specială (astfel sînt obiecțiile: definiția nu este corectă, termenul de adevăr devine de prisos ș.a.), altele au un caracter filozofic. Astfel de obiecții filozofice se referă la pluralitatea conceptelor de „adevăr", convenționalism, neutralismul filozofic, absolutizarea poziției logic-formale etc.

În lucrarea sa *Das Wahrheitsproblem und die Idee der Semantik*, Wolfgang Stegmüller trece în revistă cea mai mare parte dintre obiecţiile enumerate mai sus şi răspunde la ele în favoarea concepţiei lui Tarski. Diferite obiecţii sînt respinse şi de Tarski în articolul său *Concepţia semantică a adevărului*.

Critica ideilor neopozitiviste ale lui Tarski a fost abordată de către filozofii marxişti: A. Schaff (1953), Mşeveniradze (1959), Narski (1962), de autorul prezentei lucrări (1962, 1964) ş.a. Defectul multora dintre criticile care s-au făcut constă aproape întotdeauna în faptul că ele nu se întemeiază pe o analiză logică riguroasă, ci plutesc la nivelul unor observaţii unilaterale şi superficiale. Se trece cu vederea peste faptul că logica modernă este prin excelenţă o disciplină de mare subtilitate şi că deci nu putem considera propoziţiile ei numai după prima intuiţie ce ne vine în minte atunci cînd venim în contact cu ele. Tot de aici provine şi dificultatea de a critica neopozitivismul apărut pe baza logicii matematice. În cele ce urmează ne vom strădui, pe cît e posibil, să precedăm aprecierile critice de o analiză logică riguroasă.

În studiul său *Concepţia semantică a adevărului*, Tarski însuşi răspunde la un şir de obiecţii, pe care le înşiră fără a aminti pe autorii lor. Să considerăm aceste obiecţii pe rînd.

1. Definiţia semantică a adevărului foloseşte relaţia *dacă şi numai dacă*, relaţie care, la rîndul ei, se defineşte prin conceptul de adevăr (vezi definiţia prin matrice a echivalenţei) şi, ca urmare, se obţine un cerc vicios. Obiecţia, fără a fi nimicitoare, este interesantă. Tarski răspunde că în cazul de faţă relaţia se află între nume şi nu între propoziţii. Cu alte cuvinte, definiţia dată este *nominală* şi nu *reală*. Eu nu cred, totuşi, că răspunsul autorului este prea clar. În fond, atunci cînd spunem „« zăpada este albă » este propoziţia adevărată dacă şi numai dacă *zăpada este albă*", relaţia se stabileşte nu pur şi simplu între nume, ci între două aserţiuni: prima despre propoziţie, iar a doua despre starea de lucruri (despre obiecte). Tarski joacă aici pe paralelismul dintre definiţiile nominale şi cele reale. Întradevăr, oricărei definiţii reale îi putem pune în corespondenţă

o definiţie nominală şi invers. Referindu-ne la schema de mai sus, ea poate fi construită nominal sau real, astfel:

a) Numim pe *X propoziţie adevărată* dacă şi numai dacă *p* (forma nominală în care „propoziţia adevărată" este, aşa cum se specifică, un *nume* care se aplică printr-o condiţie);

b) *X este* propoziţie adevărată dacă şi numai dacă *p* (forma reală în care se presupune că noi definim semnificaţia numelui „propoziţie adevărată", cunoscut anterior, prin condiţia indicată).

Nimeni nu ne împiedică să considerăm definiţia dată de Tarski drept nominală, dar asta nu înseamnă că odată introdusă nu putem să-i găsim corespondentul într-o definiţie reală. Mai este relaţia *dacă şi numai dacă*, în cazul definiţiei reale, o simplă relaţie între nume? Evident, nu. Cu toate că evită răspunsul la obiecţia adusă, lucrarea lui Tarski ne sugerează următorul răspuns corect: obiecţia pierde din vedere faptul că logica este o ştiinţă reflexivă (care revine asupra propriilor sale enunţuri); ca teorie a gîndirii, ea poate să se refere şi la cazul particular de gîndire, procesul care se desfăşoară atunci cînd gîndim însuşi procesul de gîndire. Logica foloseşte expresiile „şi", „sau", „dacă... atunci", „dacă şi numai dacă" etc. chiar cînd cercetează... înseşi aceste expresii. Cu alte cuvinte, aceleaşi expresii sînt luate o dată în limba-obiect (supuse cercetării) şi o dată în metalimbă (cînd folosesc ca instrument de cercetare). Nu este de loc un cerc vicios în acest proces, deoarece expresiile utilizate în metalimbă pot să fie utilizate intuitiv (aşa cum se şi întîmplă) fără o definiţie..., dar pentru cercetarea unei definiţii a lor. Pe de altă parte, aşa cum am arătat într-un capitol anterior, relaţia *dacă şi numai dacă* utilizată în propoziţii concrete (aşa cum e cazul cu definiţia lui Tarski) nici nu trebuie confundată cu funcţia echivalenţei, care este doar *citită* cu ajutorul aceleiaşi expresii. În nici un caz legătura propoziţională *dacă şi numai dacă* nu poate fi redusă la funcţia echivalenţei şi deci nici nu poate fi definită prin adevăr, deşi are o anumită caracteristică valorică. Obiecţia adusă mai sus face în mod cert însă această confuzie, iar Tarski însuşi n-a prevăzut distincţia.

2. O altă obiecție la care răspunde Tarski arată că conceptul de adevăr este de prisos, deoarece expresia „X este adevărat" poate fi înlocuită pur și simplu cu propoziția la care se referă. Din acest unghi de vedere, arată Tarski, toate definițiile ar fi de prisos. Pe de altă parte, nu în toate cazurile termenul de „adevăr" poate fi eliminat. De exemplu, fără acest termen aserțiunea „toate consecințele din sentințe adevărate sînt adevărate" nu poate fi formulată. Răspunsul lui Tarski este întemeiat; mai trebuie însă adăugat faptul că problema poate fi pusă astfel numai dacă avem o definiție nominală. Altfel nu se poate reduce o afirmație care constată valoarea unei propoziții la propoziția despre care se vorbește, pur și simplu pentru că ele conțin informații diferite. Apoi, dacă noi n-am specifica niciodată valoarea propozițiilor, cum am distinge propozițiile adevărate de cele false?

3. Concepția semantică a adevărului nu este conformă cu bunul-simț. La aceasta Tarski răspunde că formularea definiției „este conformă cu conținutul intuitiv al definiției lui Aristotel"[1], nefiind decît forma modernă a acesteia. În ce privește bunul-simț, Tarski aduce în sprijin datele statisticii: 90% din cei întrebați au răspuns în spiritul formulării sale. Într-adevăr, la întrebarea pe care am pune-o unui om fără pregătire logică și filozofică: „Ce înseamnă că «zăpada este albă» este adevărată?", ni s-ar răspunde după toate probabilitățile: „înseamnă că *zăpada este albă*". Argumentul acesta însă trebuie luat strict prin raport cu obiecția, altfel se pot isca confuzii de natură filozofică.

4. După cum arată W. Stegmüller, unii autori au enunțat o serie de observații în legătură cu faptul că Tarski nu definește „noțiunea generală de adevăr", ci o oarecare „ficțiune lingvistică" *(Sprachfiction)*, care își găsește justificare pur și simplu în faptul că contextul în care ea apare satisface unele trebuințe ale „formei" limbii. Stegmüller dă la această obiecție un răspuns pragmatic. El afirmă că în semantică nu avem de-a face cu conceptul general de adevăr, ci pur și simplu cu o noțiune care joacă un rol special, și anume ea ne ajută să atingem o anumită

---

[1] H. Feigl și W. Sellars. *Op. cit.*, p. 69.

exactitate. Avem de-a face, spune Stegmüller, nu cu termenul general de „adevăr", ci cu termenul special de „adevăr în *S*". Această noţiune de „adevăr în *S*" are o singură justificare: dacă admitem cutare şi cutare, atunci putem să atingem o „anumită exactitate în limitele semanticii". De aici decurge că conceptul de „adevăr în *S*" este pur şi simplu un concept funcţional (am spune pragmatic); mai mult, este vorba de concept derivat (particular): „adevărul propoziţiei unui domeniu logic special" (domeniul claselor). Într-adevăr, aici se înlocuieşte conceptul general de adevăr cu concepte particulare „adevăr în S_1", „adevăr în S_2", „adevăr în S_3" etc., însă concluziile pe care le trage autorul de aici sînt neîntemeiate.

Nu există, spune Stegmüller, un singur concept de „adevăr", ci atîtea concepte specifice cîte sisteme semantice diferite se pot construi. Încercarea de a elimina conceptul general de adevăr (încercare care va mai apărea şi sub altă formă) este neîndoios una dintre limitele neopozitiviste ale concepţiei lui Tarski cu privire la propriile sale rezultate. Stegmüller, polemizînd cu adversarii lui Tarski, deplasează pînă la urmă atenţia în direcţia unor aspecte convenţionaliste din concepţia lui Tarski.

5. Aşadar, o altă obiecţie ce se poate aduce acestei concepţii este aceea de a fi „convenţionalistă". Această obiecţie însă nu vizează, după părerea noastră, definiţia ca atare, ci interpretarea şi justificarea ei. Pentru a nu pierde legătura dintre pluralitatea conceptelor de adevăr, se afirmă că acordul dintre toate aceste concepte este realizat de acordul lor cu schema de adevăr, prin aceea că toate aceste concepte exprimă o singură „intenţie" (intenţie exprimată de schemă). Tarski nu defineşte termenul „intenţie", dar din context rezultă că este vorba de *ceea ce vrea să exprime* amintita schemă. Cu aceasta n-am eliminat convenţionalismul. Voi arăta că toate argumentele pe care Stegmüller le extrage din opera lui Tarski sau pe care le adaugă el sînt de natură convenţionalistă (pragmatică). Iată aceste argumente:

a) relaţia între expresie şi obiect este convenţională (deci şi între propoziţia adevărată şi obiectul ei);

b) termenul „adevăr în *S*" depinde de limba aleasă (deci de o convenţie);

c) ceea ce unește diferite concepte de adevăr este o schemă generală (o schemă convențională).

Se înțelege că o limbă este într-o anumită măsură convențională, dar odată aleasă ea trebuie să exprime ceva neconvențional și deci ea însăși capătă un caracter neconvențional. Așa cum am mai arătat, *forma* aleasă pentru a desemna obiectul este convențională, dar *desemnarea* trebuie să se supună anumitor postulate, care la rîndul lor nu mai sînt convenționale, ci trebuie satisfăcute de orice formă lingvistică în măsura în care limba trebuie, la rîndul ei, să satisfacă cerința fundamentală de a fi instrument de cunoaștere.

Dacă limba nu este total convențională, atunci cu atît mai mult termenul de „adevăr în *S*" nu este convențional, căci el este în dependență de tipul de propoziții din *S*, deci *de tipul de informație pe care sistemul este destinat s-o înmagazineze și s-o transmită*. Forma propozițiilor din limbajul claselor trebuie să difere de forma propozițiilor din limbajul predicatelor sau al relațiilor sau, în orice caz, trebuie să se adauge anumite premise în care să se specifice cînd o expresie aparține unui limbaj și cînd altuia. Dacă deosebirea dintre aceste limbajuri n-ar depinde de nimic altceva decît de convenții, ce rost ar avea aceste convenții: nu s-ar transforma totul într-un joc pueril? Indiferent de tipul de propoziții care ar fi definit, conceptul de adevăr exprimă relații între expresie (propoziție) și obiect, care, fiind subordonate unui scop precis (cunoașterea obiectului), nu sînt de loc convenționale. Prin faptul că putem face abstracție la un moment dat de obiectul de la care am pornit și către care tindem, nu înseamnă cîtuși de puțin convenționalism. Această observație vizează și schema definiției adevărului. Raportul ei cu definiția aristotelică a adevărului, raport recunoscut de la început de către Tarski, nu arată de loc caracterul ei convențional, iar așa-numita „intenție generală" (sensul, informația ei) este și mai puțin convențională.

În general, dincolo de *forma* și de *regulile specifice* unei limbi sau alteia există reguli generale pe care trebuie să le satisfacă fiecare dintre ele în măsura în care sînt instrumente de cunoaștere.

6) Din punct de vedere filozofic, Tarski face din rezultatele sale justificări pentru un „ neutralism" față de pozițiile filozofice fundamentale.

„În general — scrie Tarski — eu nu cred că aici există vreo problemă filozofică a adevărului"[1]. Cînd spunem „zăpada este albă" este adevărată numai dacă *zăpada este albă* (în fapt), pe noi nu ne interesează de loc ce vrea să însemne că *zăpada este albă în fapt*. Concepția semantică a adevărului nu implică indicarea condițiilor prin care propoziția poate fi asertată. „În acest fel putem accepta concepția semantică a adevărului, fără a postula vreo atitudine epistemologică; noi putem rămîne realiști naivi, realiști critici sau idealiști empiriști sau metafizicieni, orice am fost mai înainte. Concepția semantică — scrie el mai departe — este complet neutrală față de aceste concepții"[2]. Ca și cum toată problema s-ar reduce la cuvinte, Tarski scrie: „Mie personal nu-mi va fi cu supărare dacă în viitor congresul mondial al « teoreticienilor adevărului » va decide prin majoritate de voturi să rezerve cuvîntul « adevăr » pentru una dintre concepțiile neclasice și vor sugera alt cuvînt, să spunem *frue* (cuvînt inventat de autor prin analogie cu *truth*. — *G. E.)*, pentru concepția considerată aici"[3]. Am expus aici ceea ce se cheamă neutralismul lui Tarski. Acest neutralism a fost supus unei critici din partea unor filozofi materialiști dialecticieni: Schaff, Mșeveniradze, Narski, ș.a., însă nu totdeauna în mod argumentat. Noi am arătat mai sus că Tarski pornește de la un fapt real: independența logică (relativă) a poziției gnoseologice față de „linia" filozofică fundamentală și, mai departe, independența relativă a logicului față de filozofic. Acest adevăr este absolutizat de Tarski prin degenerarea în „neutralism". „Independența relativă" devine „neutralism filozofic". Aceasta, asociată cu ideea pluralității conceptelor de adevăr — „poate să vină vremea cînd ne vom ciocni cu cîteva concepte de adevăr incompatibile (!), dar în diferite chipuri clare și exacte"[4] — ,

---

[1] H. Feigl și W. Sellars, *Op. cit.*, p. 71.
[2] Ibidem, p. 71.
[3] Ibidem, p. 66.
[4] Ibidem, p. 66.

ne dă imaginea unei concepţii care încearcă să plutească între materialism şi idealism.

7. La cele de mai sus am mai adăuga faptul că autorul exagerează punctul de vedere logic-formal. Pentru operarea pur formală cu schema definiţiei sau cu definiţia ne interesează prea puţin conţinutul fiecărui termen al relaţiei luat în parte; important este ca noi să operăm corect cu această relaţie. Odată însă ce ne-am propus să discutăm sub aspect filozofic această relaţie, trebuie să acceptăm *volens nolens* un punct de vedere filozofic. Un sîmbure de adevăr pe care îl exprimă autorul se reduce în fond la o tautologie: *întrucît discut în planul logic, eu nu discut în planul nelogic (filozofic)*. Totuși autorul depăşeşte planul logic şi face, după cum am văzut, afirmaţii de natură filozofică, în care caz el este obligat să afecteze poziţii filozofice. A face din „neutralitatea" conceptului de adevăr şi a logicii o poziţie izolată de orice altă concepţie filozofică revine în ultimă instanţă la a face filozofie de un anumit tip, filozofie care izgoneşte... filozofia, ceea ce nu înseamnă altceva decît tot... filozofie, şi anume „neopozitivism".

Am vrea să facem în continuare o serie de consideraţii cu privire la valoarea cercetărilor lui Tarski. Despre rezultate practice în acest sens încă nu se poate vorbi. Semantica logică n-a depăşit încă planul importanţei teoretice, deşi în ultima vreme se schiţează oarecare posibilităţi practice. Metoda şi precizările făcute de Tarski în legătură cu definiţia conceptului de adevăr au valoare în primul rînd pentru logică, dar ele nu sînt lipsite de valoare şi pentru filozofie în general. O filozofie care vrea să utilizeze termeni precişi nu se poate dispensa de rezultatele și de metodele logic formale, ceea ce nu înseamnă de loc că ea s-ar reduce la acestea. Eu cred că în primul rînd schema definiţiei adevărului, schemă dată de Tarski, va trebui de aici înainte să intre în orice manual de logică. Apoi, metodele prin care Tarski defineşte conceptul de adevăr în limbile formalizate sînt şi ele importante pentru cercetarea diferitelor concepte (în primul rînd semantice). Aceste metode dezvoltă sfera corectitudinii logice și-i măresc posibilităţile de analiză.

2. CONCEPTUL DE ADEVĂR ÎN LOGICILE POLIVALENTE

Deja în anumite momente ale lucrării ne-am referit la această problemă. Ea cere însă o atenție specială. Logica bivalentă are la bază principiul terțului exclus, principiu care nu admite decît că *o propoziție poate fi sau adevărată sau falsă*, o a treia valoare neexistînd. Și, totuși, există cazuri de propoziții care nu încap în această „schemă bivalentă", propoziții admise în știință. Toată lumea este de acord că raportul dintre circumferința cercului și diametru (notat prin π), dat de ecuația

$$\pi = 3{,}14,$$

este departe de a fi o propoziție „absolut adevărată". Se admite aici în mod conștient o anumită inexactitate, inexactitate care poartă numele de „aproximație". Deoarece valoarea lui π nu este absolut exactă, se înțelege că și adevărul propoziției „$\pi = 3{,}14$" nu este „absolut exact", ci „aproximativ". Din acest punct de vedere s-ar putea afirma că propoziția „$\pi \neq 3{,}14$" este de asemenea „aproximativ adevărată". Dar propoziția „$\pi \neq 3{,}14$" este neîndoios (ca formă) negația propoziției „$\pi = 3{,}14$". Rezultă de aici că a spune „sau $\pi = 3{,}14$ este adevărată, sau $\pi \neq 3{,}14$ este adevărată" este o propoziție cel puțin falsă, dacă nu chiar fără sens. Explicația este simplă: conceptul „aproximativ adevărat" nu este identic cu conceptul „adevărat", primul fiind o înmlădiere a celui de-al doilea. Cazul propoziției „$\pi = 3{,}14$" era cunoscut de mult (de altfel matematica operează sistematic cu propoziții aproximative) și totuși nu s-a încercat tentativa construirii unei noi logici. Pentru a marca aproximația egalității, matematicienii folosesc un semn special, $\approx$, adică $\pi \approx 3{,}14$. Abia efortul de soluționare a paradoxelor logice-matematice a dus la apariția unor logici care admit mai mult de două valori: logici n-valente. Aceste logici au pus noi probleme pentru epistemologie, care, din păcate, în filozofia materialist-dialectică nu și-au găsit nici un loc pînă în momentul de față. O primă încercare de a aborda aceste probleme am făcut-o în disertația noastră (1962), iar unele idei principale au fost publicate în referatul la această disertație (Moscova, 1962).

Revenim acum asupra problemei, însă dintr-o perspectivă mai largă. În cele ce urmează vom aborda următoarele probleme: a) izvoarele logicii polivalente, b) sistemele polivalente, c) baza generală a sistemelor polivalente din punct de vedere filozofic. Aceste teme ne vor dezvălui, sperăm, un sector important al epistemologiei moderne.

a) *Izvoarele logicii polivalente*

Încă de pe timpul lui Aristotel a devenit o obişnuinţă a defini propoziţia în funcţie de valoarea ei logică, deşi la Aristotel nu găsim nici o indicaţie cu privire la procedeul de definire a însuşi conceptului de adevăr. În lucrarea sa *Despre interpretare*, Aristotel defineşte propoziţia ca pe ceva „ce este adevărat sau fals". O asemenea definiţie a devenit principiul logicii bivalente. Într-adevăr, într-unul dintre cele mai moderne tratate de logică, *Bazele logicii teoretice* de Hilbert şi Ackermann, se scrie: „Prin enunţ urmează să înţelegem orice propoziţie în legătură cu care are sens să afirmăm că conţinutul ei este adevărat sau fals"[1]. Dar deja Aristotel a observat că este imposibil să se reducă „propoziţia" la un principiu atît de rigid şi de aceea el a efectuat oarecare „slăbire" a principiului enunţat mai sus. Aceasta este cu deosebire clar atunci cînd este vorba despre propoziţiile asupra viitorilor contingenţi. Urmărind să fundamenteze logic şi filozofic principiul social al posibilităţilor de a delibera, Aristotel arată că trebuie să admitem, pe lîngă necesitate, şi întîmplarea. Admiterea întîmplării (a „viitorului contingent") presupune însă admiterea *dublei posibilităţi*. În ultimă instanţă, totul se învîrteşte la Aristotel în jurul acestei duble *posibilităţi*: posibilitatea de a fi sau posibilitatea de a nu fi (ele coexistînd). El cercetează conceptul de *posibilitate* în raport cu lucrurile (ontologic), în raport cu adevărul (gnoseologic) şi în raport cu forma propoziţiei (logic). Textul său arată că această posibilitate se traduce de la nivelul lucrurilor la nivelul adevărului şi al formei propoziţiei. Astfel posibilitatea bătăliei navale de mîine devine posibilitatea adevărului propoziţiei „mîine va fi

---

[1] Ibidem, p. 19.

o bătălie navală", propoziție care, datorită acestui fapt, se traduce în forma: „Este posibil ca mîine să fie o bătălie navală". Toată logica lui Aristotel este fundamentată ontologic, și cazul propozițiilor de posibilitate nu face excepție. După părerea noastră, atunci, ca și astăzi, conceptul de „posibilitate" era neclar. În fond îl introduce ca bază necesară pentru admiterea *deliberării* și nu printr-o cercetare de sine stătătoare, indiferent de problema deliberării. Deocamdată însă nu ne vom ocupa de problema ontologică a posibilității.

Aristotel scrie că „în unele cazuri există contingență, și atunci afirmația nu este nici mai adevărată, nici mai falsă decît negația"[1]. Existența întîmplării, după cum se vede, impune o gradare a adevărului („mai adevărat", „mai fals"). „Așa stau lucrurile cu tot ce nu este totdeauna existent sau totdeauna neexistent. Una dintre cele două propoziții în astfel de cazuri trebuie să fie adevărată și cealaltă falsă, dar noi nu putem spune precis care anume este adevărată sau falsă, ci trebuie să lăsăm alternativa nedecisă"[2]. Aici Aristotel introduce un element nou față de textul citat anterior: propoziția este adevărată sau falsă, dar noi „nu putem spune precis care anume este". Aristotel distinge aici între *propoziția adevărată* și *propoziția despre care știm că este adevărată* (cunoștința), distincție care a fost analizată de noi mai sus. Înmlădierea este aici precizată, și ea constă din particularizarea conceptului de adevăr: *adevărul-cunoștință*. O frază mai departe aduce o altă precizare: „Una este probabil mai adevărată decît cealaltă, dar ea nu este nici actual adevărată, nici actual falsă"[3]. Se introduce astfel termenul de „actual adevărat", spre deosebire de „potențial adevărat". Termenul de „actual adevărat" trebuie înțeles în sensul că evenimentul are loc simultan cu enunțarea. În § 12 există încă un aspect important: Aristotel pune *adevărul* și *falsul* alături de modalități[4]. Judecata de valoare (de exemplu „Este adevărat...") apare în acest caz ca o judecată de moda-

---

[1] Aristotel. *Organon* I, București, Editura științifică, 1958, p. 227.
[2] Ibidem, p. 228.
[3] Ibidem.
[4] Ibidem, p. 244.

litate. Dacă ţinem seama de aceea că Aristotel vorbeşte şi despre faptul că propoziţia „trebuie să fie adevărată"[1], ceea ce este sinonim cu „este necesar", putem deduce că el admite următoarele înmlădieri ale conceptului de adevăr (modalităţi ale adevărului): a) mai mult sau mai puţin adevărat, b) actual adevărat, c) potenţial adevărat, d) necesar adevărat, e) contingent adevărat, f) ştim că este adevărat. Este de remarcat că Aristotel a folosit foarte puţin din punct de vedere logic aceste concepte. Principala sa remarcă constă în aceea că terţul exclus nu se mai aplică la aceste concepte în modul în care se aplică la conceptele de adevăr şi fals.

Conceptele înmlădiate au fost introduse şi după Aristotel (Leibniz, Kant ş.a.), dar ideea de a construi o logică bazată pe asemenea concepte a apărut de-abia în secolul al XX-lea. G. Boole socotise logica cu două valori (1,0) ca un caz-limită al raportului de probabilitate $\frac{k}{l}$, unde k este numărul cazurilor favorabile, iar l numărul cazurilor posibile. Cînd $k = l$ (diferit de zero), avem $\frac{k}{l} = 1$, iar cînd $k = 0$, $\frac{k}{l} = 0$. Ideea gradării conceptului de adevăr o exprimă şi Peirce în felul următor: „Conform cu logica obişnuită, orice enunţ este sau adevărat, sau fals şi nici o altă distincţie nu se mai poate face. Aceasta este, cum ar spune geometrul, concepţia descriptivă; concepţia metrică ar spune că orice enunţ este mai mult sau mai puţin fals şi că aceasta este o chestiune de grad". Există foarte multe posibilităţi de a efectua această înmlădiere. O distincţie foarte frecventă există chiar în corpul logicii matematice bivalente: astfel se deosebeşte între enunţurile „totdeauna adevărate" (tautologii), „totdeauna false" (contradicţii) şi „uneori adevărate, uneori false" (realizabile), idee relevată şi de acad. Ath. Joja[2].

Ideea de a construi o logică cu valori modale aparţine logicianului polonez J. Łukasiewicz. În anul 1920, J. Łukasiewicz,

---

[1] Ibidem, p. 228.

[2] Ath. Joja. *Studii de logică*, Editura Academiei, Bucureşti, 1960.

pornind de la ideea de a rezolva paradoxele modalității, construiește o logică trivalentă cu următoarele valori: „adevăr", „fals", „posibil". În același an, E.L. Post, plecînd de la considerația abstractă că în afară de valorile (1,0) ar putea fi considerate și altele, reprezentate tot numeric, a construit de asemenea o logică *n*-valentă (Post s-a inspirat din considerațiile lui Peirce).

O altă cale de construire a sistemelor polivalente a fost generată de necesitatea de a rezolva paradoxele teoriei mulțimilor și în general paradoxele logicii. Astfel, Heyting construiește „logica intuiționistă" abolind legea terțului exclus și a dublei negații, iar Bocivar construiește o logică trivalentă în care intră valorile adevăr, fals, absurd. Cu timpul, ideea că pot fi construite multe alte sisteme pornind de la conceptul de adevăr înmlădiat a devenit o idee comună. Vom menționa pe lîngă sistemele de mai sus pe cele construite de Reichenbach, Kleene, Destouches-Fevrier, Moisil ș.a.

Dacă ar trebui să rezumăm într-o frază izvoarele logicii polivalente, ar trebui să spunem: *există în gîndirea noastră o masă de propoziții care nu pot fi analizate cu ajutorul logicii bivalente; ele cer un alt aparat mai flexibil*. A renunța la aceste propoziții nu este posibil; ele sînt fapte necesare ale procesului de gîndire. Se poate face o analogie între dezvoltarea noțiunii de „valență logică" și dezvoltarea „noțiunii de număr". În fond, ambele procese se caracterizează prin faptul că la un moment dat se ajunge la o „aporie" în ce privește determinarea valorii (numerice, logice), aporie care se soluționează prin introducerea unui nou tip de valori. Iată cum descriu procesul de dezvoltare a numerelor autorii C. Borș și D. Borș în lucrarea *Numere complexe*: „Fiind cunoscută mulțimea numerelor naturale, dacă a și b sînt două numere ale acestei mulțimi, operațiile $a + b$ și $a \cdot b$ au totdeauna sens, căci rezultatele lor sînt tot numere naturale. Scăderea a două numere naturale $a—b$ are ca rezultat un număr natural numai dacă $a>b$; dacă $a<b$, operația scăderii nu mai are sens dacă nu cunoaștem și alte numere în afară de cele naturale. Adică ecuația $x + b = a$ nu este satisfăcută în mulțimea numerelor naturale decît dacă $a>b$ și nu are soluții dacă $a\leqslant b$. Aici apare o contradicție, o negare a operației de scădere,

Pentru a înlătura această imposibilitate a scăderii s-a ajuns la soluţia de a lărgi mulţimea numerelor naturale prin introducerea unor simboluri noi 0, -1, -2, ..., numite, primul, zero, iar celelalte *numere întregi negative*. Aceste numere, adăugate mulţimii numerelor naturale, alcătuiesc *mulţimea numerelor întregi*. În această mulţime, ecuaţia $x + b = a$ are întotdeauna soluţie... În mulţimea numerelor întregi oarecare, împărţirea nu este totdeauna posibilă, adică ecuaţia $bx = a$ nu are totdeauna soluţie. Se iveşte astfel o contradicţie, o negare a împărţirii. În această situaţie sînt necesare simboluri noi, şi acestea se obţin prin negarea imposibilităţii împărţirii, ajungîndu-se la noţiunea de număr fracţionar $\frac{a}{b}$.

Mulţimea formată de aceste numere noi, împreună cu numerele întregi oarecare, alcătuieşte mulţimea numerelor raţionale, în care ecuaţia $bx = a$ poate fi întotdeauna rezolvată... Procesul de extensiune (prelungire) a mulţimii numerelor a fost dus mai departe şi pe aceeaşi cale dialectică au fost introduse numere iraţionale" (ş.a.m.d.)[1].

Un proces analog a avut loc şi în dezvoltarea noţiunii „valoare logică" (şi, corespunzător, de „propoziţie"). Faptul că terţul exclus nu are loc în domeniul propoziţiilor de posibilitate l-a dus pe Łukasiewicz la ideea de a introduce valoarea „posibil", faptul că legea identităţii şi a terţului exclus nu au loc în domeniul propoziţiilor absurde l-a făcut pe Bocivar să introducă valoarea „absurd" etc. În general, constatarea că o lege oarecare dată nu se aplică la o anumită expresie (de forma afirmativă sau negativă) a dus la ideea că această expresie are o altă valoare logică, aşa după cum faptul că o operaţie (sau ecuaţie) nu are soluţie într-un domeniu de numere a dus la ideea introducerii unor noi numere. Vom numi acest proces *procesul formal de introducere a noi obiecte*.

În cele ce urmează voi expune cu titlu informativ o serie de logici polivalente.

---

[1] C. Borş şi D. Borş, *Numere complexe*, Bucureşti, Editura tehnică, 1962, p. 6–7.

b) *Logica lui Łukasiewicz*

Łukasiewicz ia ca punct de plecare valorile „adevăr", „fals", „posibil", pe care le notează respectiv cu 1, 0, $1/2$. El introduce de asemenea un simbolism logic nou: *Np* (negaţie de *p*), *Kpq* (conjuncţie de *p, q*), *Apq* (disjuncţie de *p, q*), *Cpq* (implicaţie de *p, q*) şi *Epq* (echivalenţă de *p, q*). Vom reda definiţiile operaţiilor *N, K, A, C*:

Np

p	*Np*
1	0
0	1
$1/2$	$1/2$

Kpq

p \ *q*	1	0	$1/2$
1	1	0	$1/2$
0	0	0	0
$1/2$	$1/2$	0	$1/2$

Apq

p \ *q*	1	0	$1/2$
1	1	1	1
0	1	0	$1/2$
$1/2$	1	$1/2$	$1/2$

Cpq

p \ *q*	1	0	$1/2$
1	1	0	$1/2$
0	1	1	1
$1/2$	1	$1/2$	1

Logica lui Łukasiewicz pune, printre altele, următoarele probleme: în virtutea cărui fapt operaţiile aşa cum le-am definit mai poartă numele de „negaţie", „conjuncţie", „disjuncţie", „implicaţie", deşi diferă de operaţiile cu acelaşi nume din logica bivalentă? ce legătură au aceste operaţii cu gîndirea intuitivă? care este legătura acestei logici cu ontologia?

Vom considera prima problemă. Dacă luăm în cercetare matricele funcţiilor trivalente, observăm că *ele conţin ca subma-*

trice matricele funcțiilor bivalente, ceea ce poate fi indicat așa cum se observă în tabelele de mai jos:

$p \backslash q$	1	0	$^1/_2$
1	1	0	$^1/_2$
0	0	0	0
$^1/_2$	$^1/_2$	0	$^1/_2$

Kpq

$p \backslash q$	1	0	$^1/_2$
1	1	0	$^1/_2$
0	1	1	1
$^1/_2$	1	$^1/_2$	1

Cpq

(analog pentru celelalte tabele). Cu alte cuvinte, *regulile de adevăr ale funcțiilor lukasiewicziene nu suprimă regulile de adevăr ale funcțiilor clasice, ci le includ*. Aceste reguli, deși nu sînt suficiente pentru definirea noilor funcții, sînt totuși necesare. Tocmai aceste idei justifică păstrarea denumirilor despre care am vorbit. Ideile de mai sus au însă legătură și cu o alta: *mulțimea propozițiilor bivalente este cuprinsă în mulțimea propozițiilor* n-*valente, ceea ce explică în ultimă instanță raportul dintre matricele de mai sus*. După cum am mai văzut însă, aceste raporturi nu se transferă automat și asupra mulțimii legilor logice, căci în logicile *n*-valente nu toate legile logicii bivalente își păstrează valabilitatea.

Răspunsul la prima întrebare ne-a dat o anumită relație între logica bivalentă și logica trivalentă (considerată). Am văzut însă că funcțiile bivalente sînt abstrase pe baza studiului proceselor deductive (cu anumite propoziții). Găsim noi un corespondent intuitiv și pentru logica trivalentă dată? Noi credem că da. Iată cîteva exemple simple care satisfac noile reguli de adevăr. Exemplificăm conjuncția și implicația.

a) $K\ (1,\ ^1/_2) = {}^1/_2$: „În 1965 Bucureștiul avea 1 382 239 de locuitori și în 1968 va avea 1 500 000". Propoziția „În 1965 Bucureștiul avea 1 382 239 de locuitori" este adevărată, în timp ce propoziția „În 1968 Bucureștiul va avea 1 500 000

de locuitori" este probabilă (posibilă), cu alte cuvinte nu există vreun temei pentru a o considera adevărată sau pentru a o considera falsă. Conjuncția dintre un fapt *real* și unul *posibil* este ea însăși posibilă.

b) $K(0, {}^1/_2) = 0$: „Azi 12 octombrie 1966 autorul acestei lucrări a călătorit cu avionul, iar mîine 13 octombrie 1966 va călători cu autobuzul". Prima propoziție este falsă și deci conjuncția (indiferent cum se va decide propoziția a doua) este falsă.

c) $K({}^1/_2, {}^1/_2) = {}^1/_2$: „Vînătorul X va împușca azi iepuri și vom mînca friptură de iepure". Ambele evenimente sînt doar posibile și deci legătura (conjuncția) lor este de asemenea posibilă.

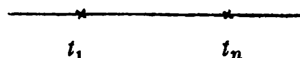
d) $C(1, {}^1/_2) = {}^1/_2$: „Azi am cumpărat bilet la loterie și deci voi cîștiga". Eu pot cu exactitate să arăt că propoziția „Azi am cumpărat bilet la loterie" este adevărată, dar consecventul acestei implicații este doar posibil. Tocmai de aceea nici nu putem să afirmăm vreo legătură necesară între el și antecedent. Implicația este doar posibilă.

e) $C({}^1/_2, {}^1/_2) = 1$:„Dacă în aprilie 1975 voi ajunge în Lună, atunci voi ocupa altă poziție în sistemul solar decît cea de azi". Este doar posibil (nu este exclus) ca în 1975 să fiu în Lună și este posibil ca în 1975 să ocup în sistemul solar altă poziție decît cea pe care o ocup în 1966, dar „a mă deplasa de pe Pămînt în Lună" implică în mod necesar „a-mi schimba poziția în sistemul solar" și deci implicația este adevărată (consecventul este analitic cuprins în antecedent). După cîte se observă, în sfera logicii discutate intră operații cu propoziții asupra „viitorului contingent". S-ar putea obiecta că noi nu spunem „voi face mîine cutare și cutare lucru" (de exemplu „voi merge mîine la cinematograf"), ci „este posibil ca mîine să fac cutare și cutare lucru" (de exemplu „este posibil ca mîine să merg la cinematograf"). În realitate, noi, bazați pe o anumită constanță a îndeplinirii deciziilor noastre, ne exprimăm de obicei cu toată siguranța: „Voi merge mîine la cinematograf", și numai rareori indicăm posibilitatea (de exemplu atunci cînd vrem să ne precizăm enunțul față de o eventuală obiecție).

Se observă de aici că există o anumită corelație între „modalitatea valorii" și „modalitatea propoziției". *Dacă modalitatea este aplicată valorii, atunci propoziția corespunzătoare este asertorică (nemodală) și, invers, dacă modalitatea se aplică propoziției, atunci valoarea este nemodală.* Iată un exemplu. Fie propoziția: „În 1967 voi călători la Paris". Dacă punem întrebarea: este adevărată sau nu această propoziție? vom răspunde că „este posibil să fie adevărată". Propoziția este asertorică, dar valoarea ei este problematică. Dacă vom spune: „*Este posibil* ca în 1967 să călătoresc la Paris", atunci modalitatea a trecut în *forma* propoziției, iar această propoziție este pur și simplu *adevărată*. Încă o observație care se poate face este că, în timp ce logica bivalentă se aplică unui fel de „prezent etern" sau, altfel spus, *în limitele necesarului, logica trivalentă înglobează viitorul și în particular viitorul întîmplător.*

Am cercetat pînă acum relațiile logicii lui Łukasiewicz cu gîndirea intuitivă; putem pune însă problema mai adînc, anume are ea vreo bază ontologică?

Nu intră în preocupările noastre directe analiza valorii de „posibil" (respectiv a acestei categorii), totuși nu putem trece mai departe fără a analiza cît de cît semnificațiile termenului „posibil". Are sau nu acest termen vreun sens ontologic și, dacă da, care anume? Pentru a rezolva această problemă vom adopta următoarea metodă. Fie x un eveniment viitor. Vom reprezenta axa timpului cu o dreaptă pe care momentele temporale vor fi indicate cu t_1, t_2, ..., t_n



Momentul t_1 va fi actual (momentul în care exprim propoziția despre evenimentul x); momentul t_n va fi momentul în care se va produce evenimentul x. Presupunem că diferența de timp t_n-t_1 s-a scurs și că evenimentul x s-a realizat. Presupunem „prin absurd" că, în timp ce noi contemplăm evenimentul în momentul t_n, un individ oarecare Y formulează o propoziție asupra evenimentului x, aflîndu-se în momentul t_1, iar noi, aflîndu-ne în momentul t_n, formulăm de asemenea o propoziție asupra acelui eveniment. Fie aceste propoziții următoarele:

(1) „În momentul t_n va avea loc evenimentul *x*" (propoziția formulată în momentul t_1);

(2) „În momentul t_n are loc evenimentul *x*" (propoziție formulată în momentul t_n).

Ce deosebire există între cele două propoziții? Propoziția (2) este adevărată și *știm* că este adevărată. Propoziția (1) este adevărată, dar *Y* nu știe acest lucru. Dar *Y* știe că propoziția (1) este posibilă. Ce înseamnă faptul că „*Y* știe că propoziția (1) este posibilă"? Aceasta înseamnă că *Y* are vreun procedeu de a decide că (1) nu este absurdă (contradictorie). Așadar, aici „posibil" înseamnă „nu este absurd", „nu este contradictoriu" (definiție dată de Leibniz). Însă noi nu ne mulțumim cu posibilitatea logică a evenimentului, deși aceasta este o condiție *sine qua non* pentru afirmarea posibilității lui. În realitate, noi ne bizuim totdeauna pe *ceva* mai mult decît această posibilitate logică. Ce anume reprezintă acest *ceva?* De ce anume mai ținem seama atunci cînd spunem „*x* este posibil"? Ce înseamnă în acest caz „*x* este posibil"? Eu cred că aceasta poate să însemne că „există o sumă de condiții (deși nu toate) compatibile (și chiar necesare) cu existența lui *x*". Așadar, „a fi posibil" în sens ontologic înseamnă „a exista o parte din condițiile necesare existenței lui *x* sau cel puțin compatibile cu existența lui *x*". Voi mai numi o astfel de posibilitate *factuală*, spre a deosebi-o de cea *logică*.

Această posibilitate este, evident, *abstractă*. Principalul este însă că noi putem acorda un sens precis „posibilității ontologice". Mai departe, deoarece o parte din condiții nu sînt reale, aceasta va însemna „este posibil să nu fie". În acest fel reușim să atribuim posibilității un sens ontologic și să evităm reducerea ei la simpla „incertitudine". Aceasta nu înseamnă, desigur, că în anumite cazuri posibilul nu este reductibil la simpla incertitudine. Să explicăm și acest caz. Fie faptul *y*. Presupunem că acest fapt *y* are loc în momentul formulării propoziției „faptul *y* are loc", dar că noi nu putem determina dacă are loc sau nu. În acest caz de asemenea vom spune că „este posibil ca faptul *y* să aibă loc", deși faptul nu mai este (ontologic vorbind) în sfera posibilului doar, ci în sfera realului. Din cele spuse mai

sus rezultă că o ontologie a logicii trivalente a lui Łukasiewicz este pe deplin posibilă. Spiritul lui Aristotel se păstrează indiscutabil: orice logică formală are un temei ontologic, ceea ce şi constituise baza posibilităţii de a obţine aplicaţii tehnice.

c) *Logica lui Bocivar*

Pornind de la ideea de a analiza propoziţiile paradoxale care au apărut în teoria mulţimilor, logicianul sovietic D.A. Bocivar construieşte o logică cu valorile „adevăr", „fals", „absurd". Bocivar scrie că „dezvoltarea (calculului său *Gh. E.)* porneşte de la formalizarea a o serie de corelaţii fundamentale şi evidente în gîndirea intuitivă între predicatele adevăr, fals şi absurd ale propoziţiilor, în virtutea cărui fapt sistemul admite o interpretare cu caracter propriu-zis logic"[1]. Bocivar împarte enunţurile în două: enunţuri clasice (interioare), de forma „A", „$\bar{A}$", „A şi B", „A sau B" etc., şi enunţuri neclasice (exterioare), de forma „A este adevărat", „A este fals", „A este adevărat şi B este adevărat" etc. Fiecărui enunţ interior îi corespunde un enunţ exterior (de exemplu lui „A" îi corespunde „A este adevărat", lui „$\bar{A}$", „A este fals" etc.), dar nu fiecărui enunţ exterior îi corespunde unul interior; astfel este enunţul „A este absurd". În această categorie intră enunţurile paradoxale. Ele sînt, cum se exprimă Bocivar, enunţuri „fără conţinut". Deşi enunţurile paradoxale sînt o realitate a gîndirii, fiind logic contradictorii, orice obiect descris cu ajutorul lor este pur şi simplu imposibil. Cu alte cuvinte, un paradox este expresia imposibilităţii logice (şi nu doar de fapt) a obiectului. Ar trebui, desigur, să cercetăm dacă formalismul lui Bocivar n-ar putea fi interpretat în sfera *imposibilităţii factuale* (imposibilitatea factuală nu presupune pe cea logică*). Se comportă oare un enunţ factual imposibil după prescripţiile logicii lui Bocivar? Acest lucru ar trebui cercetat. Logica lui Bocivar, după cîte vedem, ne

---

[1] D. A. Bocivar. *Ob adnom trëhznocinom iscislenii i evo primenenii k analizu paradoksov klasiceskovo rasşirennovo funkţionalnovo iscislenia*, în *Matem. sb.*, 4 (46) : 2, 1938, p. 287.

* Imposibil logic = contradictoriu. Imposibil factual = imposibil de realizat la un moment dat (în raport cu anumite condiţii).

împinge de la problemele posibilului (Łukasiewicz) la cele ale imposibilului, ceea ce înseamnă tot o modalitate a adevărului („este imposibil să fie adevărat"). Desigur, apare problema dacă posibilul *logic* și *factual*, ca și imposibilul *logic* și *factual*, se comportă după aceeași logică? Nu vom da deocamdată nici un răspuns la această întrebare.

d) *Logica lui Kleene*

Kleene construiește o logică a „cunoștinței". Ne-am întîlnit deja cu această problemă într-un paragraf anterior. Legătura logicii lui Kleene cu gîndirea intuitivă nu stîrnește nici o îndoială. El pornește de la următoarele semnificații: „cunoscut ca adevărat", „cunoscut ca fals" și „necunoscut" (simbolic, respectiv, 1, 2, 3). El introduce două tipuri de funcții: „slabe" și „tari". A treia valoare poate fi precizată în diferite chipuri. Ea, de exemplu, poate fi identificată cu ceea ce Aristotel numește „nu putem spune precis". Funcțiile „slabe" se construiesc din cele bivalente pe calea completării matricelor bivalente cu a treia valoare. Funcțiile „tari" diferă de funcțiile lui Łukasiewicz doar într-un singur punct: în cazul implicației (3, 3, 3), în rest ele sînt identice. După părerea noastră, putem construi aceste funcții „tari" cu următorul procedeu: considerăm valoarea 3 ca fiind „nedecis". Fie funcția negației. Dacă $p = 1$, $Np = 0$. Dacă $p = 0$, $Np = 1$. Aceasta înseamnă că, dacă este decisă afirmația ca fiind 1, negația de asemenea este decisă, ea va avea 0. Dacă $p = 3$ (nedecis), atunci *Np va depinde de modul în care se va decide p*. Deoarece numărul de decizii este mic, două, noi putem face pe rînd presupunerile: a) dacă p se va decide ca fiind 1, atunci, conform primei decizii, $Np = 0$; b) dacă p se va decide ca fiind 0, atunci, conform celei de-a doua decizii, $Np = 1$. În acest fel, dacă p nu este decis (= poate lua încă pe oricare dintre cele două valori), Np de asemenea nu este decis (poate lua pe oricare dintre cele două valori). Matricea trivalentă se poate construi deci direct pe baza matricei bivalente. Considerăm implicația. Pentru comoditate și chiar din considerente mai adînci, putem nota a treia valoare cu x (simbolul necunoscutei), iar primele

cu 1 şi 0. Ne interesează îndeosebi următoarele situaţii din matricea implicaţiei:

p	q	Cpq
1	x	x
x	1	1
0	x	1
x	0	x
x	x	x

Deoarece x nu se poate decide decît în două feluri, atunci noi putem face pe rînd presupunerile respective:

— dacă $p = 1$ şi q se va decide ca fiind 1, atunci $C\,p\,q = 1$ (căci $C\ (1,\ 1) = 1$);

— dacă $p = 1$ şi q se va decide ca fiind 0, atunci $C\,p\,q = 0$ (căci $C\ (1,\ 0) = 1$);

— dacă p se va decide ca fiind 1, $q = 1$, $C\,p\,q = 1$ $(C(1,1) = 1)$;

— dacă p se va decide ca fiind 0, $q = 1$, $C\,p\,q = 1$ $(C\ (0,1) = 1)$.

Asemănător pentru cazurile trei şi patru. Cazul cinci cuprinde patru situaţii (respectiv vom avea una dintre cele patru situaţii din matricea bivalentă):

— dacă $p = 1$, $q = 1$, atunci $Cpq = 1$;

— dacă $p = 1$, $q = 0$, atunci $Cpq = 0$;

....

După cît se vede, logica lui Kleene, asemenea algebrei numerice, introduce pe lîngă valorile determinate (1,0) şi valori necunoscute (x). Am insistat asupra acestei interpretări (introdusă de noi), deoarece ea relevă un fapt foarte important: logica matematică aplică procedeele algebrei numerice. Din acest motiv ele nu trebuie să se confunde, căci o „algebră logică" este totuşi interpretabilă pe semnificaţii de o natură diferită de „algebra numerică".

e) *Logica lui Reichenbach*

Hans Reichenbach (1893-1953) construieşte o logică trivalentă cu scopul de a rezolva din punct de vedere logic dificultăţile mecanicii cuantice. Conform cu aceasta se introduce pe lîn-

gă valorile de adevăr (1) şi fals (2) valoarea „nedeterminabil" (3). Acest „nedeterminabil" nu este „nedecisul" (nerezolvatul) lui Kleene, ci „indeterminabilul" lui Heisenberg din mecanica cuantică. După explicaţiile lui Reichenbach, este vorba de „indecidabil", adică enunţ ce nu poate fi nici verificat şi nici infirmat.

Înainte de a prezenta logica intuiţionistă, reamintim cîteva lucruri cu privire la raportul dintre logicile *n*-valente şi logica bivalentă[1]. Reţinem faptul că unele legi din logica bivalentă (şi în primul rînd legea terţului exclus) nu mai apar ca legi în logicile *n*-valente. Mai mult, nici negaţiile lor nu sînt legi aici. În acest fel, legea noncontradicţiei acţionează la nivelul mulţimii sistemelor logice: nici o logică *n*-valentă ($n>2$) nu poate veni în contradicţie cu logica bivalentă; logica bivalentă intervine totdeauna în consideraţiile metateoretice asupra sistemelor *n*-valente. Despre aceste aspecte am mai discutat însă atunci cînd am abordat problema legilor logice.

f) *Logica intuiţionistă*

O discuţie exhaustivă merită logica intuiţionistă şi concepţia filozofică a intuiţioniştilor. Pentru a înţelege natura logicii intuiţioniste, vom face o incursiune la izvoarele acestei logici: discuţiile asupra infinitului matematic (concepţia lui Brouwer)*. Intuiţionismul matematic este rezultatul criticii conceptului de „infinit" efectuată de Brouwer şi de şcoala sa, dar sub diferite aspecte el îşi are rădăcinile în opere foarte vechi, cum ar fi, de exemplu, opera lui Aristotel. Deoarece ideea de „intuiţionism matematic" cuprinde 1) o filozofie a matematicii, 2) o logică şi 3) o matematică reconstruită pe baza unor principii noi, va trebui să avem grijă de a nu confunda cele trei planuri, ele avînd valori diferite.

---

[1] A. A. Zinoviev. *Filosofskie problemî mnogoznacinoi loghiki*, Moscova, 1960.

* Expunerea intuiţionismului o facem după lucrările lui Heyting şi Kleene, citate în text.

Înainte de a trata diferite probleme speciale, voi expune principiile generale care caracterizează intuiţionismul matematic:

1) matematica nu are un conţinut „independent de gîndire" *(Brouwer)*;

2) conţinutul matematicii constă în însuşi procesul de construcţie a obiectelor matematice, proces efectuat de matematician;

3) „obiectele matematice sînt sesizate imediat de spiritul gînditor. Cunoaşterea matematică este, prin urmare, independentă de experienţă" *(Heyting)*;

4) obiectul matematic (de exemplu numărul) este admis dacă este dat un procedeu care poate să ne ducă în principiu (abstracţie făcînd de limitele practice care se referă la lungimea procesului efectuat) la construcţia efectivă (intuibilă) a acestui obiect.

Aceste patru idei sînt suficiente pentru a caracteriza în principiu intuiţionismul matematic, deşi diferiţi autori se opresc la o parte dintre ele.

Primul principiu, care mai este formulat cu predilecţie astfel: obiectele matematice nu au existenţă independentă de gîndire (Brouwer), este evident un principiu idealist. El arată clar că din punct de vedere filozofic intuiţionismul matematic este un idealism deschis, sincer. Al doilea principiu face din „activitatea gîndirii" însăşi realitatea şi esenţa obiectelor matematice. El arată că intuiţionismul matematic este din punct de vedere filozofic un idealism subiectiv.

Al treilea principiu „rezolvă" problema din punct de vedere gnoseologic: cunoaşterea este constructiv-intuitivă. El defineşte însuşi specificul filozofic al concepţiei, este deci principiul „intuiţionismului" ca atare.

Al patrulea principiu stabileşte criteriul „existenţei matematice" (adevărul). El poate fi numit „principiul constructivist". De fapt eu cred că acesta este singurul principiu care are consecinţe logice (şi nu doar presupune) asupra matematicii şi logicii. De altfel, în ultima vreme, o anumită ramură a intuiţionismului s-a dezvoltat prin recunoaşterea doar a ultimului principiu şi negarea celorlalte trei; aceasta este „constructi-

vismul", dezvoltat în U.R.S.S. sub direcţia lui A.A. Markov (Leningrad). Acest ultim principiu nu are nimic idealist şi criticile ce i se pot aduce pot fi făcute doar în sensul că *reprezintă o exigenţă greu realizabilă*. Personal nu voi considera că problemele mai concrete (logice şi matematice) au vreo legătură cu principiile idealiste ale intuiţionismului. Se poate ca în formulările mai concrete să se strecoare şi unele expresii confuze de nuanţă idealist-intuiţionistă, dar aceasta nu schimbă esenţa observaţiilor particulare foarte profunde făcute de către Brouwer şi şcoala sa.

Problemele concrete în legătură cu care Brouwer şi şcoala sa au dezvoltat noua concepţie logică-matematică sînt următoarele: a) problema infinitului, b) problema existenţei matematice, c) problema principiilor logice, d) logica „intuiţionistă" şi e) reconstrucţia matematicii pe baze constructiviste. Chestiunile sînt atît de legate între ele, încît prefer să presupun de la început o tratare comună şi nu distinctă.

Aristotel, Kant, Gauss ş.a. au făcut o distincţie netă între ideea de „infinit actual" şi „infinit potenţial". Kant scria în *Critica raţiunii pure* că „agregatul infinit al lucrurilor reale nu poate fi privit ca un întreg dat şi că deci el nu poate fi privit ca dat simultan"[1], iar Gauss scria: „Eu protestez... împotriva folosirii mărimii infinite ca fiind ceva încheiat, şi aceasta niciodată nu este permis în matematică"[2]. Nici unul dintre aceşti gînditori n-au tras concluzii importante din această distincţie şi n-au folosit-o în mod constructiv.

Iată ce scrie Weyl: „Conform cu concepţiile sale şi cu înţelegerea sa asupra istoriei (ale lui Brouwer. — *G. E*), logica clasică a fost abstrasă din matematica mulţimilor şi submulţimilor finite... Uitînd de această origine limitată, ulterior această logică a fost considerată drept ceva superior şi primordial în raport cu întreaga matematică şi, la urma urmelor, au început s-o aplice fără vreo justificare şi la matematica mulţimilor infinite"[3]. Există principii ale matematicii mărimilor finite care

---

[1] Ibidem, p. 362.
[2] Vezi S. C. Kleene. *Op. cit.*, p. 48.
[3] Vezi S. C. Kleene. *Op. cit.*, p. 46.

nu sînt aplicate la mulţimile infinite. Astfel „banalul" principiu întregul este mai mare decît partea. Încă Galileu arăta că acest principiu este infirmat de posibilitatea de a stabili o corespondenţă biunivocă (1-1) între şirul numerelor naturale pare şi şirul numerelor naturale impare:

$$\{1, 3, \ldots, n, \ldots\}$$
$$\{2, 6, \ldots, 2n\}$$

Un alt principiu spune că „orice mulţime a numerelor naturale conţine cel mai mare număr al acestei mulţimi". Paradoxul lui Burali — Forti a dus la infirmarea acestui principiu. În definitiv el este valabil doar pentru mulţimile finite. Aceste fapte şi altele l-au dus pe Brouwer la revizuirea bazelor filozofice ale matematicii. „Brouwer — scrie Heyting — a fost primul care a descoperit obiectul care într-adevăr cere o altă formă a logicii. Acest obiect este construcţia matematică intelectuală *(Brouwer*, 1908). Cauza constă în aceea că în matematică noi avem de la început de a face cu infinitul, în timp ce logica obişnuită este făcută pentru raţionamente despre totalităţi finite"[1]. Primul principiu care este pus în discuţie de către Brouwer este principiul terţului exclus, pe care-l vom simboliza astfel: $\forall p\ A\ (p, \bar{p})$ („pentru orice p, disjuncţie de p şi $\bar{p}$").

Fie p enunţul $\exists x\ (x \varepsilon D)\ P\ (x)$ („există un x care aparţine mulţimii D astfel că el are proprietatea P"). Negarea acestui enunţ (non-p) va fi $\forall\ x\ (x \varepsilon D)\ \bar{p}\ (n)$ („orice x care aparţine lui D are însuşirea non-P"). Conform cu terţul exclus, vom avea enunţul: ***există un element al lui D care posedă însuşirea P sau orice element al lui D posedă însuşirea non-P.*** Dacă D este o mulţime finită, putem practic (sau măcar în principiu) cerceta fiecare element şi decide care dintre părţile acestei alternative este adevărată. Tocmai această posibilitate de a efectua cercetarea fiecărui element, aşa cum ne asigură Brouwer şi Heyting, formează baza terţului exclus pentru mulţimile finite. Or, această posibilitate este exclusă pentru mulţimile infinite. Chiar şi procedeele matematice care ne-ar duce uneori la succes nu pot

---

[1] A. Heyting. *Intuiţionism. Introducere*, trad. rusă, Moscova, 1965, p.9.

în general fi luate drept garanţie pentru aceasta, cu atît mai mult cu cît există cazuri în care ele nu sînt de nici un folos, cum ar fi cazul teoremei lui Fermat (care afirmă că ecuaţia $x^n + y^n = z^n$ nu are rezolvarea în numere întregi şi pozitive x, y, z, n, pentru $n>2$). Aşadar, principiul terţului exclus a apărut pe baza mulţimilor finite. Extinderea lui la mulţimile infinite transformă aceste mulţimi infinite în „actual infinit" (actualul este o proprietate a finitului), de unde rezultă paradoxele mulţimilor. În concepţia infinitului actual (încheiat, întins, existenţial), „mulţimea infinită este considerată ca existînd sub forma totalităţii închise, care precede şi este independentă de orice proces de producere sau de construire a ei de către om, ca şi cum ea ar sta în faţa noastră în totalitatea ei pentru a o percepe"[1]. Acestui infinit, Brouwer îi opune concepţia sa despre infinitul potenţial (în devenire, constructiv), adică despre seria „care poate fi continuată la infinit". Problema infinitului actual şi potenţial este extrem de complexă şi se poate spune că, în esenţă, ea nu este rezolvată. Se prea poate să ne aflăm în faţa unei „dualităţi" de tipul aceleia din fizică (dualitatea „corpuscul-undă"). În orice caz, noi trebuie să rezolvăm dificultatea următoare: dacă admitem *infinitul actual*, admitem de la început un concept contradictoriu *(infinit* = negarea oricărui finit, *actual* = finit temporal, deci *infinit actual* = infinit finit) sau *se pare* că, dacă noi nu admitem *infinitul actual*, atunci trebuie să negăm orice enunţ care consideră infinitul ca un „tot" sau „ansamblu" în înţelesul obişnuit (ceva închis ce nu mai este supus devenirii). Brouwer, reducînd totul la o viziune *metodologică* (= din punctul de vedere al metodelor de rezolvare), crede a elimina asemenea probleme „metafizice" cum este problema ontologică a infinitului. Însă se pune întrebarea: *ne putem noi mulţumi cu un punct de vedere metodologic (constructiv) asupra lucrurilor?* Absolutizarea duce şi a dus în mod efectiv la idealism. Iată această concepţie cît se poate de clar exprimată de către Heyting: „Trebuie să înţelegeţi în ce a constat programul lui Brouwer *(Brouwer,* 1907). El a constat

---

[1] S. C. Kleene. *Op. cit.*, p. 48.

în cercetarea construcţiilor matematice intelectuale ca atare, fără vreo legătură cu asemenea probleme ca natura obiectelor construite sau dacă există sau nu aceste obiecte independent de cunoştinţele noastre despre ele"[1]. Mai mult, în studierea construcţiilor matematice intelectuale „a exista" trebuie să însemne acelaşi lucru cu „a fi construit"[2]. Despre o realitate obiectivă independentă de gîndirea matematică către care această gîndire trebuie să tindă, nu mai poate fi vorba, căci „din punctul de vedere al intuiţionismului matematica este studiul anumitor funcţii ale raţiunii omeneşti"[3]. Obiectul este, aşadar, ca în idealismul clasic german (Kant, Hegel), nu ceva ce trebuie să fie „reprodus" *(Marx)* de raţiunea noastră, ci, dimpotrivă, el este pe de-a-ntregul produsul acestei raţiuni. În planul teoriei cunoaşterii, concepţia lui Brouwer revine la o problemă discutată de noi anterior: trebuie să admitem că există *adevăr* independent de *verificare* şi deci de conştiinţa adevărului, deci trebuie să admitem distincţia dintre *adevăr* şi *cunoştinţă* sau nu? Dacă ne vom limita la unghiul de vedere metodologic, vom conchide, asemenea pragmaticilor (şi intuiţionismul discutat este o variantă de pragmatism), că *lumea există întrucît este construită*, ceea ce şi afirmă Brouwer cu privire la obiectele matematice. Repet, n-am de gînd să neg legitimitatea unghiului de vedere metodologic (în speţă constructivist); ceea ce neg este substituirea unghiului de vedere ontologic cu acesta sau identificarea lor (prin reducere). În concluzie, reţinem constructivitatea ca un unghi de vedere deosebit de interesant, dar nu filozofia constructivistă.

O problemă foarte importantă pentru intuiţionişti este aceea a enunţurilor matematice universale şi existenţiale. Un enunţ universal despre numere, adică un enunţ de forma $\forall n\ P(n)$ în lumina concepţiei lui Brouwer, trebuie înţeles astfel: dacă este dat n, atunci putem decide că $P(n)$, iar un enunţ existenţial, adică de forma $\exists n\ P(n)$, conţine informaţie par-

---

[1] Heyting. *Intuiţionism* (ed. cit.), p. 9.
[2] Ibidem, p. 11.
[3] Ibidem, p. 19.

țială despre un alt enunț care *dă* un astfel de număr *n* sau dă metoda care ne permite să găsim un astfel de număr. Cu alte cuvinte, orice enunț matematic se referă la un *obiect construit* sau, cel puțin, la *metoda care ne permite să-l construim*. În particular, enunțul „2 + 2 = 3 + 1" trebuie înțeles ca o prescurtare a afirmației „eu am îndeplinit construcțiile desemnate prin «2 + 2» și «3 + 1» și am găsit că ele duc la unul și același rezultat". Se înțelege că din cîmpul de cercetare al intuiționiștilor este exclusă „totalitatea infinită a numerelor naturale". Ca exemplu clasic de metodă intuiționistă este dată metoda inducției matematice. Dintre metodele intuiționiste trebuie respinsă metoda reducerii la absurd, care se bazează pe legea terțului exclus și a dublei negații. Această metodă nu este constructivă, deoarece prin trecerea de la $\bar{\bar{p}}$ la p nu dă nici un exemplu și nici procedeul de a construi un asemenea exemplu.

Limitările intuiționiste asupra înțelesului enunțurilor matematice și-au găsit expresia în logica intuiționistă (infinitistă) a lui Heyting. Se afirmă uneori că aceasta este o logică trivalentă (vezi Goodstein); în realitate ea este o logică cu o infinitate de valori.

Să începem cu introducerea „funcțiilor intuiționiste". Orice „enunț intuiționist" (elementar) satisface sau nu satisface posibilitatea de rezolvare intuiționistă (adică dispunem de exemplele care să le confirme sau, cel puțin, metoda de a construi aceste exemple). În conformitate cu aceasta avem următoarea interpretare a funcțiilor compuse:

1) „p sau q" înseamnă: p este satisfăcut în mod intuiționist sau q este satisfăcut în mod intuiționist;

2) „p și q" înseamnă: atît p, cît și q sînt satisfăcute în mod intuiționist;

3) „din p se deduce q" înseamnă: q se deduce din p prin raționamente intuiționiste;

4) „non-p" (ceea ce intuiționiștii scriu astfel $\urcorner$ „p") înseamnă: din p se deduce prin metode intuiționiste q și non-q.

Heyting adoptă următorul sistem de simboluri: p, q, r,... variabile propoziționale, $\wedge$ (și), $\vee$ (sau), $\rightarrow$ (implică), $\urcorner$ (nega-

ţie). Sistemul formal al propoziţiilor intuiţioniste cuprinde următoarele unsprezece axiome:

1) $p \to (p \wedge p)$,
2) $(p \wedge q) \to (q \wedge p)$,
3) $(p \to q) \to [(p \wedge r) \to (q \wedge r)]$,
4) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$,
5) $q \to (p \to q)$,
6) $[p \wedge (p \to q)] \to q$,
7) $p \to (p \vee q)$,
8) $(p \vee q) \to (q \vee p)$,
9) $[(p \to r) \wedge (q \to r)] \to \to [(p \vee q) \to r]$,
10) $\neg p \to (p \to q)$,
11) $[(p \to q) \wedge (p \to \neg q)] \to \neg p$.

Printre teoremele intuiţioniste nu vom găsi terţul exclus şi dubla negaţie, de asemenea nici pe acelea care reduc un functor la alţii (functorii sînt independenţi). Prin eliminarea axiomei 10) Johanson a construit aşa-numitul „calcul minimal" (1936). Evident că prin adăugarea terţului exclus sau a unei formule de aceeaşi putere cu terţul exclus se poate trece la calculul clasic al propoziţiilor. Extinderea logicii intuiţioniste la calculul predicatelor se face prin anexarea la sistemul de axiome dat mai sus a axiomelor date de Hilbert şi Ackermann. Logica lui Heyting a primit o interpretare dată de Kolmogorov. Această interpretare tratează fiecare enunţ elementar ca pe o problemă care poate fi rezolvată sau nerezolvată. La rîndul ei, noţiunea de problemă a fost precizată în chip diferit. Putem aprecia în urma celor de mai sus cît de greu sînt de satisfăcut exigenţele intuiţioniste. Avem de-a face cu un fel de „purgatoriu" al ideilor.

Intuiţioniştii au construit pe lîngă o filozofie şi o logică, o matematică. În Uniunea Sovietică s-a dezvoltat o ramură mai flexibilă a intuiţionismului lui Brouwer şi Heyting, anume curentul constructivist, în frunte cu A.A. Markov (şcoala de la Leningrad). Există deja cîteva tomuri de matematică constructivistă publicate de către Institutul de matematică „V.A. Steklov". Primele volume conţin şi o expunere a concepţiei filozofice a constructivismului. Astfel, în al doilea volum, A.A. Markov scrie articolul *Despre matematica constructivă*. De asemenea concepţia constructivistă este expusă (în primul şi în al doilea volum) în lucrările lui N.A. Şanin. În 1965 a fost tradusă la Moscova lucrarea lui A. Heyting *Intuiţionism*. Această lucrare este

concepută în forma dialogurilor (platonice) între personajul *Form* (formalist), *Int* (intuiţionist), *Pragm* (pragmatist), *Sign* (significist) şi *Letter* (nu e prea clar ce poziţie reprezintă). A.A. Markov se alătură discuţiei sub numele de *Con* (constructivist). Iată prima intervenţie în discuţie a personajului *Con*: „Bună ziua, dragi colegi! Aud că domnul *Int* îşi expune aici credoul său. El are perfectă dreptate cînd afirmă că construcţiile matematice cer o logică specială. Totuși eu nu pot fi de acord cu aceea că matematica are *de la început* de a face cu «infinitul». «Infinitul» se introduce în matematică prin abstracţie. Se aplică abstracţia realizării potenţiale și abstracţia infinitului actual. Natura ultimei mie nu-mi este clară, dar prima constă în a face abstracţie de graniţele practice ale posibilităţii noastre de construcţie, determinate de limitele spaţiului, timpului şi materialelor pe care le avem la dispoziţie. Construcţiile *intelectuale*, despre care a vorbit domnul *Int*, sînt potenţial realizabile. Ele au ca prototip procesele materiale practic realizabile. Considerarea construcţiilor potenţial realizabile cere o logică specială: logica matematică constructivă"[1].

Constructiviştii leagă începutul acestei orientări de introducerea noţiunii de *algoritm* (cu alte cuvinte a procedeului de rezolvare în matematică). În ce priveşte existenţa obiectelor matematice, A.A. Markov scrie: „În matematica constructivă, existenţa obiectului cu proprietăţile date numai atunci se consideră demonstrată cînd este indicat procedeul de construcţie potenţial realizabilă a obiectului cu aceste însușiri"[2]. În ce privește conceptul de *adevăr*, A.A. Markov îl reduce la „verificat ca adevărat"[3]. Spre deosebire de intuiţionişti, constructiviştii acceptă în unele cazuri raţionamentul prin absurd (deşi nu acceptă terţul exclus). Nu s-ar putea spune că din punct de vedere filozofic constructiviştii s-au eliberat total de idealism, deși A.A. Markov acuză pe intuiţionişti de... subiectivism. El scrie: „Nu sînt de loc de acord cu considerarea «clarităţii intuitive» drept criteriu

---

[1] A. Heyting. *Intuiţionism*, în *ed. cit.* (anexa), p. 161.
[2] A. A. Markov, O konstruktivnoi matematike. *Trudî matematiceskogo instituta imeni V.A. Steklova*, LXVII, Moscova, 1962, Leningrad, p. 9.
[3] Ibidem, p. 9.

al adevărului în matematică, deoarece acest criteriu înseamnă triumful deplin al subiectivismului și se află în discordanță cu înțelegerea științei ca formă a activității sociale" (sic!)[1].

Rezultă că nici constructiviștii nu vor să depășească concepția după care obiectul matematic ar fi pur și simplu rezultatul unei activități. Existența obiectului matematic este pur și simplu „construcție potențial realizabilă"[2]. Este drept că Markov caută *o legătură între construcțiile matematice și construcțiile materiale* (datorită asemănării dintre ele, „proiectele" care sînt construcții ale intelectului pot fi aplicate în construcțiile materiale), însă nicăieri el nu vede în construcțiile matematice un proces de „reproducere" *(Marx)* a unor raporturi reale. Din nou se relevă importanța definirii științei *prin obiect* (printr-o realitate independentă de construcțiile intelectuale) și nu... obiectul prin activitatea constructivă a intelectului. Nu cercetarea din punct de vedere constructiv a proceselor intelectuale este viciul acestor concepții filozofice, ci considerarea acestor procese ca generînd o existență fără a reflecta vreo existență. Analogia cu procesul de construcție materială nu trebuie să ne inducă în eroare. Obiectul material poate fi pur și simplu un produs (fără reproducere), de exemplu construcția unei mașini, însă procesele de construcție intelectuală nu pot fi considerate în nici un caz de același tip și ele nu pot fi pur și simplu o „formă a activității" sociale ca oricare alta.

În consecință, aș vrea să spun că atît intuiționismul, cît și constructivismul demonstrează procesul de pătrundere adîncă a viziunii dialectice în știință; din păcate, această dialectică pentru mulți merge spre Hegel și nu spre Marx. Ei au asociat orientarea lor cu o atitudine antimetafizică (mai precis antispeculativă) și antidogmatică (aici mai ales în U.R.S.S.). Aceasta arată că chiar și o concepție justă cum este materialismul dialectic nu-și poate juca rolul de călăuză a științei *cînd își folosește în mod dogmatic principiile. Nu este suficient să știi pe dinafară principii juste; mai trebuie să ai și deprindere — și aceasta este lucrul cel mai greu — de a le mînui cum se cuvine.*

---

[1] Ibidem, p. 11.
[2] Ibidem, p. 9.

g) *Baza generală a logicilor polivalente din punct de vedere filozofic*

Analiza izvoarelor şi a conţinutului logicilor *n*-valente ne-a arătat că apariţia logicii *n*-valente, departe de a fi un act „arbitrar", este fundamentată din punctul de vedere al logicii dezvoltării cunoaşterii. Care este fundamentul ontologic al acestei logici? Are ea rădăcini în realitatea obiectivă? După părerea noastră, logica polivalentă se bazează pe următoarea caracteristică a proceselor. În realitate, nu totdeauna putem încadra procesele în dihotomia „da-nu" (despre aceasta vezi Engels) şi trebuie să admitem *gradaţia fenomenelor*. În natură şi în viaţa socială, dihotomia „da-nu" este pur şi simplu rezultatul final (cazul-limită) care se obţine după o luptă îndelungată a forţelor opuse. Mai mult, în numeroase cazuri, dihotomia „da-nu" reprezintă pur şi simplu o idealizare. O situaţie analogă are loc şi în gîndire, care, întrucît este proces şi întrucît trebuie să reflecte realitatea, se supune legilor generale ale oricărui proces şi legilor speciale ale „reproducerii" realului.

Scopul ştiinţei este reproducerea adevărată a realităţii. Această reproducere departe de a fi un proces liniar, este un proces foarte complicat, cu multe zigzaguri. Prelucrînd informaţiile venite de la simţuri cu ajutorul limbii, noi formăm tot felul de propoziţii, despre care nu putem spune din prima clipă că au sens sau nu (sînt absurde), sînt integral adevărate sau aproximativ adevărate, sînt adevărate sau false. „Adevărul — scria Lenin — este un proces. De la ideea subiectivă, omul merge spre adevărul obiectiv prin «practică» (şi tehnică)"[1]. Numai în ultimă instanţă, prin intermediul practicii, omul obţine răspuns la întrebarea: *cum este ideea dată prin raport cu realitatea*? Procesul verificării este un proces complicat de confruntare a ideii cu realitatea, de probare în practică, de confruntare a ideilor între ele, de excludere a unora, de corectare a altora, de selecţionare şi apreciere. Fiecare moment este înscris într-un rezultat. Fiecare

[1] V. I. Lenin. *Opere complete*, vol. 29, Bucureşti, Editura Politică, 1966, ed. a doua, p. 170.

rezultat presupune o complicată analiză logică. *Procesul de apropiere de realitate se reflectă în primul rînd în varietatea propozițiilor cu care operează gîndirea noastră*. Primul model al formalismelor polivalente este gîndirea noastră vie, luată în complexitatea raporturilor ei cu realitatea. Tocmai aceasta este sarcina logicilor polivalente: a analiza varietatea propozițiilor din gîndirea noastră. Nici o logică luată în parte nu este capabilă să fie instrument universal de analiză a tuturor formelor de propoziții existente în gîndire. Apariția logicilor polivalente exprimă tocmai necesitatea de a ne apropia mai mult de fluxul real al gîndirii, față de care logica bivalentă este doar expresia cazurilor extreme și a rezultatului final.

O întrebare de un deosebit interes filozofic este următoarea: în fond, termenii de „adevăr" și de „fals" care apar în interpretarea formalismelor polivalente mai sînt ei identici cu termenii de „adevăr" și „fals" din logica bivalentă? După părerea noastră, nu. Avem o clasificare a valorilor după anumite criterii. Ceea ce numim noi aici „adevăr" și „fals" nu reprezintă în realitate decît două *concepte înmlădiate* (după anumite criterii sau, în orice caz, particularizate). Astfel, în logica lui Lukasiewicz avem „adevărat cu certitudine", „fals cu certitudine" și „posibil adevărat"; în logica lui Heyting, gama varietăților este indefinit de mare (în particular avem „rezolvat ca adevărat", „rezolvat ca fals" etc.); în logica lui Bocivar avem „adevărat simplu", „fals simplu", „fals contradictoriu" (absurd); în logica lui Kleene avem „adevărat cunoscut", „fals cunoscut" și „încă necunoscut"; în logica lui Reichenbach avem „adevăr verificabil", „infirmabil" (fals dovedibil ca atare) și „imposibil de dovedit ca adevărat sau ca fals", iar în logica intuiționistă adevărul este „efectiv demonstrabil". Această situație este firească, deoarece orice nou criteriu introdus se intersectează cu vechiul criteriu, dînd astfel o nouă diviziune (respectiv clasificare) a conceptelor. Prof. Gr. C. Moisil scrie: „Este însă clar că împărțirea în două clase a mulțimii propozițiilor nu este singura posibilă. Pe de o parte, putem ține seama de modul cum este o propoziție adevărată sau falsă: este ea necesar adevărată, respectiv falsă, sau este adevărată,

respectiv falsă, în mod contingent?"[1] Astfel se obține o logică tetravalentă.

În cazul nostru dividem mulțimea propozițiilor în adevărate și false. La rîndul lor, cele adevărate se divid în verificate și neverificate, la fel cele false: sînt verificat false sau neverificat false.

În concluzie, în sistemele n-valente ($n>2$) nu mai avem conceptul „pur" de adevăr, așa cum este dat de definiția sa generală, ci un concept afectat de o înmlădiere, particularizat, derivat. Acest fapt deosebit de important care n-a fost luat îndeajuns în considerație sub aspect epistemologic pledează în favoarea menținerii definiției generale a adevărului ca o condiție a unității tuturor conceptelor derivate de adevăr și deci pentru menținerea logicii bivalente ca o bază generală pentru orice alt sistem de logică. Sîntem de acord cu concluzia lui A.A. Zinoviev: „Metalimba logicii trivalente aparține logicii bivalente"[2], cu condiția că ea poate fi generalizată: *metalimba oricărei logici* n-*valente aparține logicii bivalente**. Cu aceasta încheiem considerațiile noastre cu privire la conceptul de adevăr în logicile polivalente.

3. SENS ȘI ADEVĂR

Pînă la apariția logicii matematice, și în speță pînă la apariția paradoxelor logice-matematice, problema adevărului propozițiilor se trata într-un mod foarte simplist: fiind dată o propoziție a cărei formă gramaticală este corectă și care, cel puțin,

---

[1] Gr. C. Moisil. *Încercări vechi și noi...*, p. 11.
[2] Ibidem, p. 42.
* Principiile identității, noncontradicției și terțului exclus iau respectiv următoarele forme metateoretice:
1) orice valoare este identică cu sine, altfel spus: dacă $p = k$ (o propoziție are o valoare k), atunci $p = k$;
2) este imposibil ca în același timp și sub același raport $p = k$ și $p \neq k$.
3) în același timp și sub același raport, $p = k$ sau $p \neq k$; a treia posibilitate nu există (vezi și Șestakov).

creează impresia că transmite o informaţie, să se spună dacă ea este adevărată sau falsă. Paradoxele logice-matematice au arătat că există o problemă mai elementară decît problema adevărului şi care, prin urmare, trebuie abordată înaintea acesteia: *problema sensului propoziţiilor*. Abordarea acestei chestiuni constituie punctul de plecare al unei noi ramuri a logicii: *semantica logică*. Fie, de exemplu, propoziţia: (α) «propoziţia scrisă în ghilimele ascuţite pe această pagină este falsă». Înainte de a pune întrebarea dacă *este adevărată sau falsă* nu trebuie oare să ne asigurăm dacă are rost sau nu să vorbim de adevărul acestei expresii? Dacă expresia respectivă cade dincolo de sfera expresiilor care pot fi adevărate sau false, atunci este inutil să mai aşteptăm vreo verificare a ei în această direcţie şi o excludem de la început din atenţia noastră. Va trebui deci *să determinăm criteriile de sens*, să ne asigurăm de la început că problema poate fi pusă înainte de a încerca s-o rezolvăm, că obiectul cade în sfera cercetării care ne interesează. A stabili criteriile de sens nu este de loc uşor. Problema sensului nu poate fi rezolvată numai în funcţie de regulile gramaticale. Din punct de vedere gramatical, expresia (α) dată mai sus este o expresie corectă a limbii române şi totuşi ea nu are sens din punct de vedere logic. Propoziţia (α) este o anomalie, întrucît nu vorbeşte despre un obiect diferit de sine, ci chiar despre sine. *Problema sensului este în primul rînd o problemă logică.*

Semantica logică studiază limbajul (raporturile dintre expresie şi obiect) din punctul de vedere al gîndirii logice. Cu alte cuvinte, ea trebuie să descrie acele condiţii generale pe care trebuie să le îndeplinească un limbaj pentru a asigura o gîndire „precisă" şi „corectă". Acestea sînt condiţiile a) de semnificaţie, b) de sens şi c) de adevăr. Pentru a asigura aceste condiţii, logica şi matematica formulează reguli riguroase semantice şi sintactice. Regulile de formare sintactice sînt reguli de sens. Conform cu regulile de formare din logica propoziţiilor, putem spune că combinaţia „*A* & *B*" are sens, în timp ce combinaţia „*A* &" nu

are sens. Deși limba obișnuită nu se bucură de posibilitățile pe care le oferă un limbaj formalizat (deductiv) în ce privește reglementarea operării cu expresiile, condițiile ei pot fi mult îmbunătățite. Pentru aceasta este necesar să supunem limbile unei analize logice-semantice riguroase.

Dintre teoriile care au supus limbajul unei analize logice, amintim aici teoria semantică a lui Gottlob Frege și teoria semantică a lui Rudolf Carnap. Frege dezvoltă teoria sa semantică în lucrările *Grundlagen der Arithmetik* (Bazele aritmeticii), *Begriffsschrift* (Calculul noțiunilor), *Funktion und Begriff* (Funcțiune și noțiune), și mai ales în *Über Sinn und Bedeutung* (Sens și semnificație), iar Carnap își expune teoria în lucrarea sa în 3 volume *Introduction to Semantics* (Introducere în semantică). Ultimul volum reprezintă o sinteză a semanticii logice și este intitulat *Meaning and Necessity* (Semnificație și necesitate).

În sfera semanticii logice intră următoarele probleme: 1. Antinomiile semantice. 2. Definițiile nominale. 3. Problemele terminologiei. 4. Teoria sensului și semnificației în limbajele naturale și speciale (considerate sub raportul corectitudinii și preciziei gîndirii). 5. Teoria adevărului. 6. Teoria structurii limbajelor deductive. 7. Sisteme formale și interpretare.

Vom da unele informații sumare cu privire la teoria semantică a lui Frege și teoria semantică a lui Carnap.

a) *Teoria lui Frege*

Frege analizează expresiile care se află în *relație de denumire* a anumitor obiecte. Astfel de expresii sînt „nume" a ceva (ele denumesc ceva). Din categoria numelor fac parte următoarele expresii: 1) numele proprii (simple și compuse), 2) nume funcționale (în particular nume noționale), 3) nume propoziționale (directe, indirecte).

Fiecărui nume i se asociază o semnificație și un sens, ca în tabelul de mai jos:

Nume	Semnificație	Sens
Nume proprii simple	obiectul desemnat	definiția asociată
Nume proprii compuse	obiectul desemnat	informația (modul de a reda obiectul)
Nume funcționale	funcția	?
Propoziții directe	valoarea de adevăr (v, f)	gîndul
Propoziții indirecte	sensul direct	sensul expresiei „sensul numelui *A*"

Iată și un tabel cu exemple

Nume	Semnificație	Sens
„Aristotel"	individul Aristotel	dascălul lui Alexandru cel Mare
„Elevul lui Platon"	individul Aristotel	informația că acest individ a fost elevul lui Platon
„sin x"	sin 0	?
„2+2=4"	adevăr	gîndul pe care-l comunică
„N.N. înțelege ce este acela centru de greutate al sistemului solar"	informația pe care o transmite expresia „centrul de greutate al sistemului solar"	sensul expresiei „sensul numelui «centrul de greutate al sistemului solar»"

Frege nu a arătat ce înțelege prin sensul numelor funcționale. Numele fără semnificație (de exemplu „centaur") sînt, după părerea lui Frege, „ficțiuni" și trebuie eliminate din limbă. Teoria

lui Frege conține o serie de teoreme importante privitoare la raportul dintre nume, și în special privitoare la raporturile dintre numele compuse și componentele lor.

b) *Teoria lui Carnap*

Carnap se ocupă de trei tipuri de expresii: 1) expresii individuale (nume proprii sau descripții), 2) predicator (expresii generale) și 3) propoziții declarative.

Spre deosebire de Frege, Carnap tratează expresiile ca fiind ceva ce au *extensiune* și *intensiune*. Definind expresiile în raport cu extensiunea și intensiunea, el speră să atingă pe această cale rezultatele dorite în ce privește operarea cu expresiile. Iată în tabelul de mai jos extensiunea și intensiunea diferitelor feluri de expresii:

Expresii	Extensiune	Intensiune
Expresii individuale	individul desemnat	conceptul individual
Predicator (ex. „om")	clasa indivizilor desemnați	însușirea exprimată
Propoziție declarativă	valoarea de adevăr (adevăr, fals)	judecata pe care o comunică

Toate cele trei tipuri de expresii sînt unificate prin aceea că noțiunile de *extensiune* și *intensiune* sînt definite în raport cu noțiunea de *adevăr*. Carnap studiază problema limbajelor extensionale (în care se folosesc numai expresii care vizează extensiunea), intensionale (folosesc numai expresii intensionale) și „neutre" (nu fac referire directă nici la extensiune, nici la intensiune). El consideră că una și aceeași judecată poate fi exprimată în trei feluri: a) extensional, b) intensional, c) neutru. Astfel, următoarele trei expresii sînt din acest punct de vedere echipolente: a) „omul face parte din clasa animalelor" (extensional), b) „omul are însușirea animal" (intensional), c) „omul este animal" (neutral).

Deosebirea dintre extensiune și intensiune (de exemplu și dintre clase și însușiri), scrie Carnap, „nu presupune două feluri de obiecte, ci numai deosebirea dintre două feluri de exprimare"[1]. Tocmai de aceea el propune construirea unei limbi „neutrale", care elimină dedublarea obiectelor (în extensionale și intensionale) și vede în aceasta satisfacerea principiului „economiei de gîndire". Desigur că în anumite contexte, așa cum a dovedit logica matematică, se poate renunța la un mod sau altul de exprimare. „Cu toate acestea — scrie prof. S.A. Ianovskaia —, de aici nu decurge cum că deosebirea dintre clasă și însușire nu poate să apară extrem de importantă. Tocmai pe baza deosebirii sensului expresiei «$x \in P$» («x este element al clasei definite de proprietatea P») și «$P(x)$» («x posedă însușirea P», ultima putînd să nici nu definească o clasă) se întemeiază unul dintre procedeele de eliminare a cunoscutelor antinomii (paradoxuri) ale teoriei mulțimilor, propus de către D.A. Bocivar"[2].

Aceasta arată, așa după cum am mai spus, că Rudolf Carnap refuză să vadă dincolo de structura limbii anumite raporturi obiective pe care limba este chemată să le reproducă.

4. ADEVĂR ȘI VERIFICARE

Acest paragraf este consacrat discutării următoarelor probleme: 1) analiza conceptului de „criteriu al adevărului", 2) criteriul adevărului și verificarea în sistemele deductive. Principiul care va sta la baza rezolvării problemelor verificării *este principiul unității dintre structura realității materiale, a reproducerii ei materiale (prin transformarea și producerea de obiecte materiale reproducem legile fundamentale ale realității) și a reproducerii ei ideale*. Neopozitivismul pune problema verificării în genere de pe poziții subiectiviste. Nu intenționăm să facem istoria unei asemenea probleme, ci doar să arătăm cum se pune ea din punctul de vedere al logicii moderne. Presupunem că avem obiectele $a, b, c, \ldots$ și relațiile $q, r, \ldots$ între ele. Construim

---

[1] R. Carnap. *Semnificație și necesitate*, p. 220.
[2] S. A. Ianovskaia. *Prefață* la „*Semnificație și necesitate*", p. 11.

pentru aceste obiecte următorul limbaj: $A, B, C, \ldots$ (numele obiectelor), $Q, R, \ldots$ (numele relațiilor). Stabilim între denumiri (nume, și obiecte corespondența următoare:

$$a, b, c, \ldots, q, r, \ldots$$
$$A, B, C, \ldots, Q, R\ldots$$

În acest fel, expresia $R(A, B)$ corespunde relației $r(a, b)$ din realitate. Expresia „$R(A, B)$" descrie relația $r(a, b)$ și deci ea exprimă o judecată despre $r(a, b)$. Presupunem că am perceput obiectele $a, b, c, \ldots$, cărora le-am dat corespunzător numele $A, B, C, \ldots$, și relația $r(a, b)$, pe care o exprimăm prin $R(A, B)$.

Gîndirea noastră este relativ independentă; ea poate crea și alte combinații cu ajutorul limbajului stabilit, deosebite de $R(A, B)$ (adică alte judecăți), de exemplu $Q(A, B)$ și $S(A, C)$. Se pune problema dacă acestor expresii le corespund relațiile obiective $q(a, b)$ și $s(a, c)$.

Această problemă este tocmai problema verificării enunțurilor „$Q(A, B)$" și „$S(A, C)$". Verificarea este deci un proces (o desfășurare de operații după anumite reguli) care duce la rezolvarea problemei adevărului unei judecăți. Metoda, procedeul care ne permite să afirmăm că noi am găsit rezolvarea problemei verificației se va numi *criteriu*. Termenul de „criteriu de verificare" are în mod obișnuit cîteva sensuri particulare: a) criteriul „material" (practica) sau chiar „criteriul obiectiv", b) criteriul „formal" (demonstrația), c) criteriul imediat (experimentul și demonstrația), d) criteriul general (practica în întregime, practica social-istorică, procesul vieții sociale în ansamblu). Sensurile a) și d) constituie împreună ceea ce vom numi „noțiunea fundamentală de criteriu". Sensurile b) și c) constituie noțiuni derivate față de noțiunea fundamentală. Istoria științelor arată că problema verificării este o problemă foarte complexă. De o verificare absolută și în același timp imediată (nemijlocită) nu poate fi vorba. Asupra acestui aspect a atras atenția Lenin vorbind despre practică.

Trebuie să acceptăm ca un principiu fundamental al cunoașterii: *verificarea este un proces în permanență deschis*. Aceasta

deoarece noi nu punem pur şi simplu problema verificării unei judecăţi aparte. Verificarea priveşte simultan întregul concept (în sensul termenului „concept" definit de noi) sau, mai explicit, „sistemul conceptului". O judecată se verifică prin întregul sistem, iar sistemul prin seria judecăţilor sale. *Unitatea dintre judecată şi sistemul conceptului în cadrul verificării este una dintre trăsăturile acestui proces.* În cele ce urmează, avînd în vedere că ceea ce ne interesează este logica matematică, vom aborda problema metodelor logice de verificare. Criteriul formal (deductiv) al verificării se formulează astfel: *dacă premisele sînt adevărate şi dacă deducţia este corectă, atunci concluzia este adevărată.* Convenim să numim această propoziţie „principiul *D*".

În limitele sistemului deductiv, satisfacerea „principiului *D*" este garanţia sigură a adevărului judecăţii (propoziţiei) considerate, cu condiţia că axiomele sînt adevărate. În istoria logicii însă nu totdeauna s-a înţeles clar semnificaţia acestui principiu. Toate discuţiile privesc antecedentul acestui principiu. Tocmai aici se întîlneşte materialismul cu idealismul în înţelegerea problemei deducţiei. După cum se observă, antecedentul constă din două condiţii: a) „dacă premisele sînt adevărate" şi b) „dacă deducţia este corectă".

Condiţia b) a fost atacată de empirişti, de inductivişti (J.S. Mill) şi, în anumite puncte, de intuiţionişti (Brouwer). Totuşi, condiţia b) este acceptată tautologic, deoarece ea este prin definiţie condiţia de existenţă a sistemelor deductive.

Discuţii mai înverşunate trezeşte condiţia a): este necesară oare această condiţie sau nu? Dacă noi negăm necesitatea acestei condiţii, ajungem la idealism în problema verificării în sistemele deductive. Diferitele denumiri ale acestui idealism — „apriorism", „formalism" sau „convenţionalism" — nu joacă un rol esenţial. Pentru noi este suficient să arătăm aici rădăcinile logice ale acestui idealism. Înţelegerea principiului *D* cere de la noi rezolvarea a două probleme: a) cum se stabileşte adevărul propoziţiilor „prime" (axiomelor, definiţiilor), b) cum se stabileşte adevărul deducţiei (adică corectitudinea). Principiul *D* nu se poate aplica pentru propria lui justificare, aşa că rezol-

varea problemelor a) şi b), probleme parţiale, ca şi a problemei integrale c), cum stabilim adevărul principiului *D*, nu se potate face prin satisfacerea acestui principiu. Din aceasta este evident că noi sîntem obligaţi „să ieşim" dincolo de limitele sistemelor deductive şi să apelăm la confruntarea cu practica. Aceasta nu înseamnă de loc că problema este uşoară. Mai întîi de toate, dacă punem problema în sensul *verificării nemijlocite*, aceasta este imposibilă într-un foarte mare număr de cazuri. Mai mult, ceea ce numim noi „verificare practică nemijlocită" se referă la un număr de cazuri foarte simple, care în ultimă instanţă pot fi verificate prin simplă confruntare, şi foarte puţin la cazurile generale. Dacă considerăm însă enunţurile generale („enunţuri formale") ale matematicii şi logicii, atunci trebuie să ne aşteptăm de la început la o imposibilitate de a da un răspuns „acum şi aici" la problema verificării.

Fiind aceasta o imposibilitate, nu trebuie oare să socotim că în genere problema astfel pusă este fără sens? Ce ne rămîne atunci? Cred că în asemenea situaţie trebuie să acceptăm următoarele propoziţii:

1) pentru enunţurile tautologice („formale"), procesul verificării rămîne în permanenţă deschis (în sensul că limitele lor de aplicabilitate nu vor fi niciodată absolut determinate);

2) a fi adevărat pentru aceste enunţuri înseamnă a exista o clasă de fapte pe care ele o descriu în ansamblu;

3) verificarea acestor enunţuri se face prin rezultatele teoretice şi experimentale*;

4) caracterul lor tautologic este o garanţie suficientă pentru *a le accepta*, şi acest caracter tautologic poate fi descoperit prin simpla analiză raţională (eventual semantică).

În ce sens, totuşi, ar putea experienţa să intervină în verificarea acestor enunţuri? Fiecare pas „experimental" verifică parţial enunţurile noastre generale şi formale, iar în general ele sînt verificate de întregul proces al practicii social-istorice.

---

* Wittgenstein scria: „6.1222... Propoziţiile logicii nu numai că nu trebuie să fie infirmate de nici o experienţă posibilă, dar ele de asemenea nu pot să fie confirmate de experienţă".

Uneori se pune problema limitelor de valabilitate ale teoriilor științifice? Trebuie să spunem că pînă la apariția unor teorii noi, superioare, ceea ce se poate spune despre „limite"este o simplă tautologie: *acest sistem descrie din realitate exact atît cît descrie*.

O dată ce noi am pus la punct cît de cît problema adevărului principiilor teoriei prin raport cu practica, urmează construcția teoriei. Problema verificării devine apoi o „problemă internă", care se rezolvă cu mijloace „locale". În logica matematică, o astfel de problemă poartă numele de „problema deciziei". Există metode interne de rezolvare (procedeul matriceal, procedeul formelor normale), metode care mai poartă numele și de „algoritmi". Problema de mai sus este rezolvată algoritmic numai pentru logica propozițiilor. Pentru logica predicatelor, ea este rezolvată numai pe anumite porțiuni și, în general, ea nu este rezolvată în mod algoritmic. În afara procedeelor algoritmice există procedeul demonstrației în sistemul axiomatic (demonstrația axiomatică nu are caracter algoritmic, ci individualizat, adică rezolvarea fiecărui caz cere un mecanism special și nu se rezolvă printr-un procedeu general). Limitele procedeelor formale de rezolvare au fost stabilite în diferite chipuri și sub diferite aspecte. În ce privește matematica și logica matematică, enumăr următoarele trei limitări importante: a) „principiul *D*" nu poate fi decis formal, b) în logica predicatelor nu există procedeu algoritmic de decizie pentru orice formulă dată, c) nu toate propozițiile pot fi înglobate în sisteme formale și deci sistemul formal este doar o porțiune din fluxul dezvoltării științei (ceea ce este arătat de teorema lui Gödel).

Toate aceste fapte, bine stabilite pentru logică și matematică, arată că nu putem lua criteriul formal drept bază absolută pentru verificarea adevărului. Trebuie să apelăm în ultimă instanță la confruntarea cu practica, cu rezultatele ei. *Această confruntare ne dă o primă probă pentru principii, o verificare foarte probabilă pentru consecințe, o verificare provizorie pentru sistemul conceptului*,

5. CÎTEVA PROBLEME GENERALE ALE TEORIEI CUNOAŞTERII

Pînă acum am abordat probleme de ceea ce am numi „epistemologie specială"; în acest paragraf vom lua în consideraţie unele fapte care au importanţă generală pentru teoria cunoaşterii.

Vom răspunde mai precis la întrebări ca acestea: a) cum apare problema fundamentală a filozofiei în logica matematică? b) cum apare problema treptelor cunoaşterii în logica matematică? c) ce dovedeşte istoria logicii matematice pentru dialectica dezvoltării cunoaşterii ştiinţifice?

De multe ori ne aşteptăm ca problema fundamentală a filozofiei (cu cele două laturi ale ei) să apară cu claritatea cu care ea a fost formulată în tratatele clasice de filozofie (marxistă sau nemarxistă). În realitate, aşa cum am mai avut ocazia să ne convingem în această lucrare, ea apare mai ales în ultima vreme în forme mult subtilizate. Aş indica din acest punct de vedere două forme: problema existenţei „obiectelor matematice" în cadrul intuiţionismului, problemă deja abordată mai sus, şi problema raportului dintre semn şi semnificaţie în cadrul formalismului. Formalismul logic-matematic, despre care vom discuta pe larg în ultimul capitol, voind să evite dificultăţile pe care le ridică cunoaşterea ca reflectare, a propus (la început metodologic prin formalismul lui Hilbert, apoi în mod absolut prin concepţiile lui H.B. Curry) să se considere drept obiect al matematicii *nu vreo semnificaţie a simbolurilor, ci însuşi simbolul*. Hilbert a exprimat aforistic această cerinţă: „Am Anfang ist das Zeichen... Diese Zeichen haben keinerlei Bedeutung" (La început este semnul... Aceste semne nu au nici o semnificaţie). Dacă Hilbert considera acest principiu doar metodologic (ca un procedeu „relativ" al gîndirii), H.B. Curry l-a absolutizat pînă a face într-adevăr din simbol singurul obiect al matematicii. Prin introducerea simbolului ca singur obiect al matematicii se asigură caracterul absolut intuitiv (în sensul perceptional) al obiectului matematicii şi caracterul ei necontradictoriu (căci, după Hilbert, lucrurile nu se pot afla în contradicţie, iar simbolurile sînt lu-

ctruri). Teorema lui Gödel a demonstrat clar absurditatea încercării de a reduce matematica la simple semne. În acest fel, acest idealism sui-generis a fost respins chiar de către dezvoltarea ulterioară a logicii și matematicii.

O evoluție interesantă are raportul dintre senzorial și rațional în procesul general de dezvoltare a logicii și matematicii. Dacă la un moment dat procesul de abstractizare înaintase atît de mult încît făcea impresia că se pierde orice legătură a gîndirii abstracte cu intuiția vie (cu percepția), în momentul de față, prin dezvoltarea formalismelor, lucrurile s-au inversat: *întregul proces al gîndirii pare să se desfășoare pe baze intuitive (prin operarea cu semne materiale) și să piardă orice caracter abstract, ideal.* Această tendință însă a fost oprită de însăși imposibilitatea de principiu (ceea ce ne-a fost arătat de asemenea de teorema lui Gödel) de a formaliza orice proces de gîndire la orice nivel. Situația aceasta însă ne duce la o concluzie certă: *raționalul nu se poate rupe de intuitiv și, chiar cînd pare a se întîmpla așa ceva, nu se face decît pregătirea pentru o apropiere și mai strînsă a lor.*

Concluzii noi și foarte importante aduce logica matematică pentru dialectica dezvoltării științelor. În lucrarea de față nu vom aborda în detalii o asemenea problemă. Aproape toate concluziile privesc dezvoltarea sistemelor deductive prin rezolvarea paradoxelor. Ce sînt paradoxele? Fenomenul paradoxelor gîndirii este cunoscut din antichitate. Astfel forma imperfectă a așa-zisului „paradox al mincinosului" a avut o circulație largă în filozofia greacă. Un cretan spune: „toți cretanii sînt mincinoși"; se pune întrebarea: cum este acest enunț: adevărat sau fals? Dacă se presupune că este adevărat, rezultă că și individul care enunță această propoziție este mincinos și deci ceea ce spune el este o minciună, deci... nu este adevărat. Cîtă vreme conceptele nu au avut o evoluție sistematică, cîtă vreme nu s-a construit sistemul conceptului care dezvăluie legăturile interne, logice dintre concepte și dintre judecăți, care pune în dependență adevărul unei judecăți de alta în rețeaua deductivă, paradoxele n-au prezentat o importanță deosebită pentru științele speciale. Secolul al XIX-lea, prin evoluția matematicii și logicii, le face însă demne de toată atenția, căci ele încep să apară în construcțiile logice-

matematice (sistemul logic-aritmetic al lui Frege, teoria mulțimilor a lui Georg Cantor ş.a.). Noțiunea de paradox a fost precizată, ea fiind *o contradicție formală demonstrată într-un sistem deductiv dat**. Apariția unei asemenea contradicții este deosebit de gravă, deoarece întregul sistem este periclitat prin aceea că apoi se poate deduce aici orice propoziție falsă. Cu alte cuvinte, nu se mai distinge între adevărul şi falsul conceptului, sistemul conceptului devenind contradictoriu. S-a arătat, de exemplu, că „mulțimea tuturor mulțimilor" este o expresie paradoxală care poate fi construită în teoria cantoriană a mulțimilor. Pe baza acestei expresii se poate ajunge la două teze opuse, de forma

$$X^* < Y^* \text{ şi } \overline{X^* < Y^*}$$

(adică numărul cardinal al unei mulțimi X *este* mai mic decît numărul cardinal al unei mulțimi Y şi *nu este* astfel).

1. *Paradoxele lui Russell.* Orice mulțime se conține sau nu se conține. Mulțimea noțiunilor abstracte se conține deoarece este ea însăşi o noțiune abstractă; mulțimea creioanelor nu se conține deoarece nu este ea însăşi creion. Cum este mulțimea *tuturor mulțimilor care nu se conțin*? Dacă presupunem că *se conține* ea *nu se conține* deoarece nu are proprietatea elementelor sale; dacă presupunem că *nu se conține* ea *se conține* deoarece are proprietatea elementelor sale.

Paralel cu acesta se obține următorul paradox. Orice predicat are sau nu are proprietatea la care se referă. Dacă o are el este *predicabil*, dacă nu, este *impredicabil*. Cum este predicatul *impredicabil*? Dacă presupunem că este *predicabil* atunci el nu are proprietatea la care se referă şi este deci *impredicabil*, dacă presupunem că este *impredicabil* el are proprietatea la care se referă şi deci este *predicabil*.

Cele două paradoxe pot fi formalizate după cum urmează.

Fie K o clasă definită astfel:

$$x \in K = \overline{x \in x}$$

---

* În afară de această definiție relativă la sistem, termenul de „paradox" poate fi definit astfel:

1) paradox = propoziție din care se poate deduce o altă propoziție împreună cu negația sa, sau

2) paradox = contradicție formală care nu poate fi soluționată la un moment dat.

unde „x" desemnează clase. Operînd substituţia x/K obţinem:

$$K \in K = \overline{K \in K}$$

Fie apoi un predicat *Imp* (impredicabil) definit astfel:

$$Imp\ (x) = \overline{x(x)}$$

(unde „x" desemnează proprietăţi). Prin substituţia x/Imp se obţine:

$$Imp\ (Imp) = \overline{Imp\ (Imp)}$$

2. *Paradoxul mincinosului*. Pe o foaie de hîrtie este scrisă o singură propoziţie: „propoziţia scrisă pe această foaie este falsă". Cum este această propoziţie? Presupunînd că este adevărată aceasta înseamnă că este falsă, presupunînd că este falsă, aceasta înseamnă că este fals că-i falsă, deci adevărată. Există un echivalent formal al acestui paradox. Se pleacă de la echivalenţa

$$1)\ p = f(p)$$

Se presupune că p (propoziţie) este adevărată — simbolic $v(p)$ — şi se arată ce urmează pentru $f\ (p)$, adică pentru „p este fals":

$$2)\ v\ (p) = v(f\ (p)\ );$$
$$3)\ v\ (f\ (p)) = f\ (p);$$
$$4)\ v\ (p) = f\ (p).$$

Se presupune apoi că „p este fals":

$$5)\ f\ (p) = f\ (f\ (p));$$
$$6)\ f\ (f\ (p)\ ) = v(p);$$
$$7)\ f\ (p) = v\ (p).$$

Alte paradoxe au fost descoperite de Burali-Forti, J. Richard, Grelling ş.a. Russell a dat un echivalent intuitiv paradoxului său: „Bărbierul satului care rade pe toţi cei ce nu se rad singuri se rade pe sine sau nu?". Dacă *se rade*, atunci el *nu se rade* singur, iar dacă *nu se rade*, atunci el *se rade* singur. Cu timpul a devenit o adevărată manie a găsi paradoxe şi, evident, ele au fost găsite. Apariţia paradoxelor a creat panică în rîndul matematicienilor. Această panică este minunat exprimată de către Hilbert: „Trebuie să fiu de acord că starea în care ne aflăm acum prin raport cu paradoxele multă vreme nu poate fi tolerată. Gîndiţi-vă: în matematică, acest model de certitudine şi adevăr, formarea noţiunilor şi mersul raţionamentelor, aşa cum fiecare

le studiază, predă și aplică, duc la absurdități. Unde dar să mai căutăm speranțe și adevăr dacă însăși gîndirea matematică dă greș?"[1].

Soluțiile propuse sînt numeroase. Le vom prezenta aici în rezumat.

1. *Teoria tipurilor*. Bertrand Russell consideră că paradoxele se datoresc unui *cerc vicios* care intervine în formarea anumitor noțiuni, cerc vicios care revine la faptul că mulțimea își este propriul său element. Astfel de mulțimi (colecții) sînt numite de Russell „totalități ilegitime". Ele apar ca un abuz al utilizării termenului „toți": „toate mulțimile", „toate propozițiile", „toate numerele" etc. În scopul evitării unor asemenea totalități ilegitime, Russell propune un sistem de reguli de ierarhizare a „obiectelor" (clase, predicate, relații, funcții, expresii) și de limitare a operării cu aceste obiecte. Astfel, fiecărui obiect (abstract) i se asociază un tip (ca în tabelul de mai jos):

Tipuri	Clase	Predicate	Relații	Simboluri
0	indivizi	concept individual	indivizi	$x, y, z, \ldots$
1	clase de indivizi	predicate de indivizi	relații de indivizi	$F, G, H, \ldots$
2	clase de clase de indivizi	predicate de predicate de indivizi	relații de relații de indivizi	$\varphi, \psi, \ldots$

Teoria tipurilor interzice aplicarea unui obiect la sine sau a unui obiect de tipul n la obiecte de tipul $n+1$. Cu alte cuvinte, sînt excluse forme ca „$K_n \in K_n$", „$F_n(F_n)$" sau „A_n este A_n", „$K_{n+1} \in K_n$", „$F_n (F_{n+1})$", „A_{n+1} este A_n" ș.a. De exemplu,

---

[1] D. Hilbert. *Fundamentele geometriei*, ed. rusă, Moscova, 1948, p. 349.

conform cu teoria tipurilor, nu putem spune „muritorul este muritor" sau „muritor face parte din clasa muritor".

În calcul, funcţia nu-şi poate fi niciodată propriul său argument, deoarece este de un tip superior argumentului său. În expresia „$Imp\ (x) = \overline{x(x)}$", pe de o parte, x nu se poate aplica lui x, ca în membrul „$\overline{x(x)}$", iar pe de altă parte nu putem opera substituţia x/Imp, deoarece Imp este de un tip mai înalt decît x. Teoria expusă aici este aşa-numita teorie simplă a tipurilor. Russell a făcut o completare prin introducerea ideii de ordin în cadrul unui tip diferit de zero.

2. *Metoda intuiţionistă*. Brouwer consideră că legile logicii clasice, legea terţului exclus şi a dublei negaţii, sînt formate pe baza mulţimilor finite (actuale). Extinderea acestor legi la mulţimile infinite (transfinite) dă naştere la paradoxe. Aceasta se explică prin aceea că mulţimile infinite nu sînt actuale, ci potenţiale (de aici distincţia dintre infinitul actual şi cel potenţial;. în concepţia lui Brouwer, aşa cum am mai văzut, infinitul este potenţial şi nu actual). Ca urmare, Brouwer propune limitarea utilizării terţului exclus şi a dublei negaţii (şi deci a raţionamentului prin absurd) la mulţimile finite. Logica infinitistă a fost construită, aşa cum am mai arătat, de către Heyting.

3. *Metoda lui Tarski*. Paradoxele semantice se datoresc confundării expresiilor luate *in suppositione formali* (utilizarea expresiei pentru a vorbi despre un obiect independent de ea) cu expresia luată *in suppositione materiali* (expresia însăşi este luată ca obiect al discursului). Astfel, în propoziţia „omul este un animal raţional", expresia „om" este luată *in suppositione formali*, în timp ce în propoziţia „ «omul» este un cuvînt al limbii române" aceeaşi expresie este luată *in suppositione materiali*. O asemenea confuzie apare, de exemplu, în „paradoxul mincinosului":

$$p = f(p),$$

unde p din stînga este luat *in suppositione formali*, iar în dreapta este luat *in suppositione materiali*. Cu alte cuvinte, expresia este confundată cu *numele* ei. Pentru a evita asemenea confuzii, Tarski propune să deosebim între limba-obiect şi metalimbă

(între limba care, să spunem, conţine expresiile *a*, *b*, *c*,... şi metalimba care conţine expresii despre *a*, *b*, *c*,...). Această soluţie îşi are originea încă în lucrările scolasticilor. Marele logician german Gottlob Frege s-a oprit el însuşi asupra acestei soluţii.

4. *Metoda lui Bocivar*. În concepţia lui Bocivar, logica pură nu poate conţine paradoxe; ele apar numai în logica aplicată. Logica aplicată, spre deosebire de logica pură, conţine propoziţii (axiome) de existenţă. Orice propoziţie paradoxală, la rîndul ei, presupune o propoziţie de existenţă (referitoare la clasa sau la predicatul introdus), propoziţie care vine în contradicţie cu axioma de existenţă. Prin urmare, a separa „logica pură" de „logica aplicată" înseamnă implicit a elimina orice posibilitate de apariţie a paradoxelor în logica pură. Paradoxul demonstrează neexistenţa predicatului considerat în domeniul de obiecte, iar enunţul paradoxal este „fără conţinut".

5. *Metoda axiomatică*. Hilbert şi alţii consideră că paradoxele pot fi evitate prin folosirea axiomaticii formale. Se dau de la început reguli riguroase pentru definirea formulelor, astfel că nici o formulă care s-ar dovedi paradoxală prin interpretare nu poate apărea în sistem. Prin formalizare, nivelul semantic al sistemului este eliminat, astfel că paradoxele semantice sînt prin însuşi acest fapt excluse.

6. *Metoda stratificării*. Quine a propus o metodă care este o simplificare a teoriei tipurilor: *stratificarea expresiilor*. O expresie $\alpha(\beta)$ obţinută prin aplicarea expresiei α la expresia β este stratificată dacă găsim o numerotare astfel că β, avînd numărul k, α are numărul $K+1$. Încălcarea regulilor de stratificare duce în anumite condiţii la paradoxe.

7. *Metoda lui Behman*. O condiţie a definiţiilor abreviative este ca „obiectul" (semnul) introdus prin definiţie să poată fi eliminat. Or, în cazul paradoxelor, condiţia eliminării nu este satisfăcută. De exemplu, în paradoxul impredicabilului,

$$Imp\ (x) = \overline{x(x)},$$

definitul „$Imp\ (x)$" nu poate fi eliminat; să evităm deci asemenea abrevieri.

8. *Metoda lui Perelman*. Expresiile paradoxale au formă

$$aRx = \overline{xRx},$$

unde x se presupune cuantificat universal:

$$\forall x(aRx = \overline{xRx}).$$

Paradoxul este o dovadă că această formulă universală este falsă. În locul formulei acesteia se propune formula

$$\forall x(x \text{ fără } a)(aRx = \overline{xRx}).$$

9. *Metoda logicii combinatorii*. Curry propune clasificarea combinatorilor în paradoxali și neparadoxali. Combinatorii paradoxali trebuie studiați pentru a fi evitați. Tot în limitele logicii combinatorii se situează și soluția lui Church: eliminarea variabilelor libere și deci a substituției (substituție care în anumite cazuri duce la paradoxe).

10. *Metoda Ianovskaia*. Generalizînd diferite procedee de rezolvare a paradoxelor, prof. Ianovskaia crede că orice paradox conține în mod neexplicit o premisă. Contradicția care se obține din paradox $[(p\rightarrow\bar{p})\cdot(\bar{p}\rightarrow p)]$ apare în virtutea acestei supoziții. Fie această premisă s; vom avea

$$s\rightarrow[(p\rightarrow\bar{p})\cdot(\bar{p}\rightarrow p)].$$

A deduce contradicția înseamnă a demonstra prin absurd falsitatea premisei s. A rezolva paradoxele înseamnă a dezvălui aceste premise ascunse și a le elimina din sistem ca fiind false. De exemplu, „mulțimea tuturor mulțimilor" duce la paradox dacă se acceptă premisa „există mulțimea tuturor mulțimilor". Expresia „$p = f(p)$" duce la paradox dacă se acceptă că ea definește o propoziție. Analog cu alte cazuri*. Nu intrăm în discuție de amănunt asupra acestor metode. Fiecare dintre ele sesizează un aspect interesant al problemei. O discuție asupra lor a fost făcută de noi în studiile noastre despre paradoxe din „Cercetări filozofice" nr. 3/1963 și „Revista de filozofie" nr. 1/1964. Printre altele am arătat acolo că orice expresie paradoxală conține o *autoraportare*, un *predicat* sau o *relație negative* și un *caz special* (o mulțime concretă, o propoziție concretă, o expresie concretă etc.). După părerea noastră, încercările de a formula paradoxe

* În legătură cu paradoxele a apărut de curînd în Editura științifică lucrarea lui A. Dumitriu. *Soluția paradoxelor logico-matematice*".

fără condiția de autoraportare au eșuat. De exemplu, s-a încercat să se ia în loc de o expresie două sau trei expresii. Fie propozițiile p_1, p_2, p_3 (și nici o altă propoziție nu există), definite astfel:

$$p_1 = f(p_2),$$
$$p_2 = f(p_3),$$
$$p_3 = f(p_1).$$

În realitate, autoraportarea este aici doar mascată, paradoxul acesta reducîndu-se la forma

$$p = f(p).$$

Reducerea se poate face, de exemplu, substituind în cea de-a treia formulă p_1 și apoi p_2 cu echivalentele lor:

$$p_3 = f[f(p_2)],$$
$$f[f(p_2)] = v(p_2),$$
$$p_3 = v(p_2),$$
$$p_3 = v[f(p_3)],$$
$$v[f(p_3)] = f(p_3),$$
$$p_3 = f(p_3) \text{ Q.E.D.}$$

Deși nu există o soluție unanim acceptată, considerăm că cel puțin următoarele idei se impun atenției: a) ierarhizarea conceptelor (respectiv a expresiilor)*, b) reglementarea aplicării conceptelor (în particular reglementarea operației de substituție), c) admiterea neexplicită a anumitor premise (în general a unei supoziții de existență), d) tratarea concluziei paradoxale ca o demonstrație prin absurd a falsității premisei tacit admise, e) distincția între infinitul actual și potențial.

Esențial este din punct de vedere filozofic că eforturile de soluționare a paradoxelor s-au soldat cu progrese deosebit de importante în dezvoltarea logicii și a matematicii. Paradoxele au jucat un adevărat rol de „contradicții-motor". În cele ce urmează vom încerca să schițăm un șir de legi ale dezvoltării con-

---

* Ar trebui să punem problema dacă ierarhizarea (stratificarea) pe care o propune teoria tipurilor ș.a. este ceva nou față de logica tradițională sau este vorba de reluarea (să zicem pe o treaptă superioară) a anumitor operații mai vechi. Gruparea expresiilor (a abstracțiilor) în „tipuri" (Russell) și descompunerea tipurilor în „ordine" (Russell) nu este în definitiv decît binecunoscuta „clasificare" sau invers, „diviziune". Prin urmare, înainte *de a deduce* trebuie să clasificăm. Prin urmare baza, „așa-numitului raționament deductiv... este totuși clasificarea" (F. Engels. *Dialectica naturii*, București, Editura politică, 1966, p. 204).

ceptelor așa cum se desprind ele din studiul istoriei logicii și matematicii în ultimii 80 de ani.

Logica matematică, prin istoria ei, dovedește că dezvoltarea științei are de-a face cu următoarea lege:

(I) *Operarea în mod exclusiv cu gîndirea abstractă duce la un moment dat la distrugerea opozițiilor în conținut (anulează diferența dintre ele în planul cunoașterii) și le reabilitează în formă (adevăr = fals, mulțime= =element etc.); dimpotrivă, gîndirea concretă distruge contradicțiile în formă și le reabilitează în conținut (reapare pe un plan superior distincția dintre adevăr și fals, mulțime și element etc.) și terminologia redevine aptă pentru exprimarea științifică.*

Să explicăm această lege. Prin „gîndirea abstractă" vom înțelege *gîndirea care se efectuează strict numai cu mijloace formale* (fără a apela la analiza intuitivă a cazurilor individuale). Prin „gîndirea concretă" vom înțelege *gîndirea care procedează prin analiza multilaterală a individualului și a concretului, apelînd la procedee de abstractizare, de generalizare și de sinteză*. Legea de mai sus poate fi înțeleasă clar pe baza următoarei scheme a dezvoltării logicii și a matematicii. Acumularea de fapte particulare în domeniul matematicii și logicii cere ca acestea să fie explicate în permanență printr-o teorie corespunzătoare. La un moment dat, încercarea de explicare cu ajutorul teoriei existente se soldează cu apariția paradoxelor (a contradicțiilor formale). Aceste paradoxe duc la pierderea oricărei distincții între categoriile contrare ale științei. Încercarea de rezolvare pe simplă cale formală devine imposibilă. Paradoxele sînt semnalul care ne arată că avem de-a face cu fapte de o natură deosebită. Se cere analiza concretă a acestor fapte și dezvoltarea teoriei (reconstrucția ei) în așa fel, încît ea să redevină aptă pentru explicație. Astfel s-au petrecut lucrurile în *trecerea de la studiul mulțimilor finite la studiul mulțimilor transfinite*. Teoria lui Cantor nu dispunea de mijloace logice (și în genere formale) necesare pentru „a îngloba" faptele care privesc mulțimile transfinite, de aceea că a ajuns la paradoxe. Un studiu multilateral al conceptului

de mulțime a dus la necesitatea de a dezvolta această teorie. Una dintre aceste dezvoltări o constituie constructivismul.

O altă lege a dialecticii dezvoltării conceptelor a fost formulată de noi în felul următor:

(II) *Dincolo de limitele domeniului lor propriu de aplicație, opozițiile polare își pierd sensul și se transformă una în alta: mulțimea = element, adevărul = = fals, predicatul = impredicabil; se conține = nu se conține, se desemnează = nu se desemnează, există= = nu există ș.a.m.d.*

Această lege exprimă de fapt operarea abstractă (formală) nelimitată cu conceptele contrarii și rezultatul acestei operări.

Dezvoltarea logicilor polivalente, la rîndul lor, duce la următoarea concluzie: nu numai rezultatul și extremele (adică dihotomia adevăr-fals) trebuie să fie obiectul logicii formale, ci și momentele intermediare care duc spre rezultat. Din aceasta nu decurge de loc că sarcina logicii formale se identifică cu a dialecticii conceptelor (logica dialectică). Deosebirea dintre ele constă în aceea că logica polivalentă oglindește numai momentele (treptele) *procesului gîndirii* (fixate în anumite propoziții) și raporturile „exterioare" (permanentele raporturi formale) dintre ele, dar ea nu studiază *trecerile*, continuitatea momentelor procesului, sarcină care revine dialecticii.

Tot dezvoltarea logicii polivalente arată că

(III) *cunoașterea merge de la operarea cu concepte contrarii (de exemplu adevăr-fals) la operarea cu cazuri din ce în ce mai „înmlădiate", mai particulare (cu cazuri derivate) ale acestor concepte, în așa fel că rețeaua conceptelor și a „sistemelor conceptelor" se apropie din ce în ce mai mult de fluxul realității.*

De la concepte rigide, la concepte din ce în ce mai elastice, iată unul dintre aspectele dinamicii dezvoltării științei.

Legile schițate mai sus constituie, după părerea noastră, legi ale logicii dialectice, *logică dialectică pe care noi o concepem*

ca pe o știință a dezvoltării conceptelor („concept“ în sensul definit de noi mai sus). Faptul că această știință este încă „în proiect“ este determinat de aceea că s-a pornit dezvoltarea ei de la citate și nu de la rezultatele pe care ni le oferă științele naturii, istoria dezvoltării acestora, căci *logica dialectică este fără îndoială o știință istorică,* o știință a legilor generale de dezvoltare a conceptelor și deci a... științei.

Capitolul al IV-lea

Logica matematică şi metodologia cunoaşterii

1. LOGICA FORMALĂ CA METODĂ DE GÎNDIRE ŞI DE CERCETARE*

O ştiinţă stîrneşte interes metodologic din două puncte de vedere: ca instrument pentru aplicaţii, orice ştiinţă este metodă; ca proces, orice ştiinţă dispune de anumite mijloace care pot fi împrumutate altor ştiinţe. În ce priveşte logica, ea este prin natura ei o metodă care prin generalitate se poate compara doar cu filozofia, fiind un instrument indispensabil oricărei gîndiri corecte şi oricărei ştiinţe. Rolul logicii în ce priveşte desfăşurarea gîndirii corecte a fost suficient pus în lumină de către logica generală. Din păcate, ea ocupă încă un loc neînsemnat în procesul de instrucţie şi de educaţie. A fost o vreme în care ea era privită ca un fel de disciplină scolastică tocmai datorită lipsei de eforturi în direcţia aplicării ei. Multă vreme *nu s-au găsit căile de a atrage în circuitul procesului de instruire şi de cercetare, cu alte cuvinte nu s-au descoperit modalităţile prin care ea să devină un instrument util activităţii omeneşti*. Datorăm în cea mai mare parte matematicienilor faptul că logica a găsit în ultimul veac căi largi spre aplicaţii teoretice şi practice. Dar rolul ce i se acordă în formarea şi călăuzirea gîndirii maselor largi este insignifiant. Discursul comun este adesea înţesat de erori logice. Uităm că multe lucruri supuse disputei s-ar rezolva simplu pe baza normelor logicii. Uităm că multe neînţelegeri între indivizi se ivesc tocmai datorită gîndirii, care nu este pregătită nici să pună problemele, nici să-l înţeleagă pe cel ce expune. Doi indivizi discută ceasuri întregi pentru ca să se vadă că de fapt ei au un limbaj diferit. Ei n-au găsit şi nu ştiu în ce fel să găsească termenii comuni. Se consideră adesea, nu de oamenii cei mai înzestraţi cu gîndire

---

* În legătură cu acest capitol (ca de altfel în legătură cu toate temele din această lucrare), cititorul poate consulta cu mult folos antologia *Logică şi filosofie*, care cuprinde studii ale celor mai reprezentativi autori din logica modernă (Editura politică, 1966).

corectă, că fiecare are logică de la natură (aşa cum, de exemplu, ar avea legi ale circulaţiei sîngelui) şi că orice instruire în acest sens este de prisos. Această mentalitate este de-a dreptul retrogradă. Nici o gîndire nu se poate lăuda cu o asemenea înzestrare de la natură care să facă inutilă perfecţionarea ei în şcoală. Or, a perfecţiona gîndirea înseamnă a o obişnui să aplice în mod conştient toate procedeele pe care ea le aplică în mod spontan (şi deci adesea doar la întîmplare) şi altele care nu sînt în acest mod aplicate. O gîndire conştientă de sine, de mijloacele ei este incontestabil o gîndire superioară celei spontane*. Desigur, s-ar putea spune: „Cine are logică naturală să şi-o dezvolte, iar pentru cine n-are nici un studiu nu i-o poate da". Această idee este numai în parte adevărată, şi anume doar în sensul că rezultatele educării gîndirii logice sînt diferite la minţi diferit înzestrate. Însă în întregime această idee este neîntemeiată. A o accepta înseamnă a presupune că *natura nu poate fi corectată*. Apoi pentru procesul de educaţie un astfel de principiu ar fi catastrofal, căci cine poate spune de la început care minte este mai mult şi care mai puţin înzestrată?

Ar fi greşit să se înţeleagă că o gîndire riguros educată este în stare să evite orice fel de eroare. Nu acesta este rezultatul pe care putem sconta. *O gîndire conştientă de mijloacele ei duce în orice caz la o considerabilă micşorare a procentului de erori logice*. Şi nu este destul atît? Nu tocmai aici găsim îndemnul de a studia şi mai ales de a ne *deprinde* s-o aplicăm? Se ştie ce dezmăţ sofistic cuprinsese într-o vreme discuţiile publice din vechea Atenă. Logica elaborată de greci (şi în primul rînd de Aristotel) era destinată în mare măsură să fie o terapeutică pentru gîndirea stăpînită de un astfel de fenomen patologic cum era sofistica. În zorii Renaşterii, logica a fost unul dintre principalele instrumente de subminare a concepţiilor teologice. Aceste concepţii, supuse unei analize logice, se dovedeau a fi

* Această logică „spontană", „naturală", „sănătoasă" este ceea ce în mod obişnuit se mai numeşte şi „bun-simţ". Engels, în *Anti-Dühring*, atrăgea atenţia asupra limitelor bunului simţ: „Numai că bunul-simţ, oricît de respectabil ar fi el în cadrul vieţii de toate zilele, trece prin cele mai ciudate aventuri de îndată ce cutează să pornească în lumea vastă a cercetării..." (F. Engels. *Anti-Dühring*, Bucureşti, Editura politică, 1966, ed. a IV-a, p. 27).

pur și simplu absurde, o înlănțuire de contradicții și de concepte vide. Neputînd rezista în fața unei riguroase analize logice, teologia a emis imperativul atît de cunoscut: „Crede și nu cerceta". Apoi logica a fost totdeauna un instrument în disputele ideologice dintre clase. Pentru ideologii revoluției franceze, scrie Engels, „toate trebuiau să-și justifice existența în fața scaunului de judecată al rațiunii sau să renunțe la existență"[1]. În multe locuri, Marx, Engels și Lenin și-au surprins adversarii ideologici cu elementare erori de logică formală. Caracterul adesea sofistic al propagandei burgheziei contemporane reclamă în modul cel mai imediat critica ei pe baza normelor gîndirii corecte. Nici o critică nu este dusă pînă la capăt dacă nu se dezvăluie mecanismul fals din punct de vedere logic. Nu rareori am întîlnit indivizi care se străduiesc să opună experiența (în particular așa-zisa „experiență de viață") gîndirii logice. Adevărul este că, fără o legătură intimă între logică și experiență, experiența însăși rămîne neînțeleasă, căci a spune *am experiență* revine la a spune *experiența trăită de mine îmi relevă cutare și cutare concluzii pentru activitatea viitoare.* Cum ar putea fi mai cu folos prelucrată o experiență dacă ignorăm sau chiar disprețuim singurul mijloc de prelucrare, gîndirea bazată pe anumite principii? În ce privește disprețul față de logică, el relevă adesea și un caracter, ca să ne exprimăm așa, cu „malformații". Pe de altă parte însă, datorită faptului că una este *a învăța normele* (ceea ce este relativ ușor de realizat) și alta *a te deprinde să le aplici* (ceea ce este, evident, aspectul cel mai dificil), atitudinea menționată exprimă uneori și o anumită comoditate sau deficiență de instruire.

Dacă logica nu și-a găsit încă locul cuvenit în formarea și dezvoltarea gîndirii corecte, dacă ea este departe de a fi suverana disputelor, în schimb ea este din ce în ce mai des folosită în cercetările științifice și mai ales în procesul de fundamentare a științelor, fie că este vorba de *analiza logică* a teoriilor științifice deja construite, fie că este vorba de *construirea* unor teorii noi. Avem pînă acum exemple strălucite de aplicație a

---

[1] F. Engels, *Op. cit.*, p. 20.

logicii în fundamentarea matematicii. Construirea (sau perfecţionarea) teoriilor ştiinţifice presupune o critică (sau analiză) logică a conceptelor ştiinţei, o studiere atentă a raporturilor logice dintre propoziţii. Toate acestea cer adesea adecvarea instrumentului logic la specificul disciplinei (aşa cum s-a întîmplat cu logica matematică), o perfecţionare a mijloacelor ei pe linia aplicării lor în ştiinţa respectivă. Considerată în această ipostază de instrument adecvat fundamentării ştiinţei, logica devine ceea ce se numeşte „analiza logică a ştiinţei", sau, cu un cuvînt care a început să aibă circulaţie de la un timp încoace, „logica ştiinţei" (termen care de altfel poate avea şi un sens mai general)*. Un rol deosebit a început să capete logica în cercetările de învăţare programată. Ea este chemată să descopere *cea mai eficientă înlănţuire logică a informaţiei predate* şi, în general, *să perfecţioneze mijloacele de predare a cunoştinţelor*. Din păcate, pedagogii noştri nu se prea grăbesc să asimileze şi să utilizeze logica modernă în cercetările lor, după cum nici logicienii nu par a se îngriji prea mult de problemele pedagogiei. Ca şi în practică, în teorie metodele noi îşi fac loc cu destule greutăţi, şi asta, evident, datorită faptului că adesea însuşirea acestor metode este destul de dificilă, ea cerînd un efort special. Nu rareori auzi afirmaţii retrograde tocmai din partea unor oameni care sînt mai puţin îndreptăţiţi s-o facă: „Logica matematică nu ne priveşte pe noi, ea nu are legătură cu problemele noastre". Însă a respinge din principiu o metodă de lucru fără a o proba este doar un semn de persistenţă voită în ignoranţă, iar cînd respingerea se bazează pe necunoaşterea metodei, ne întrebăm dacă n-avem de-a face cu o atitudine de etică îndoielnică în ştiinţă.

Poate că cel mai mare succes pe care l-a obţinut logica modernă în aplicaţiile ei a fost rezolvarea cu ajutorul calculului logic

---

* Reluarea acestei probleme în cercetările filozofice de la noi din ţară o datorăm lui Cornel Popa. După cîte înţeleg eu, autorul are în vedere prin *logica ştiinţei* studiul procesului de cercetare ştiinţifică din punctul de vedere al gîndirii formale. Vezi studiile: 1) *Obiectul şi metodele logicii cercetării ştiinţifice*, în vol. X din colecţia *Materialismul dialectic şi ştiinţele naturii*; 2) *Karl Popper şi logica ştiinţei*, în „Revista de filozofie" nr. 11 din 1965, şi 3) *Funcţia explicativă a teoriei ştiinţifice*, în „Revista de filozofie" nr. 1 din 1966.

a unor probleme de tehnică, cum ar fi analiza şi sinteza schemelor electrice. Este o probă incontestabilă de vitalitate a unei ştiinţe care multă vreme a purtat blamul unei preocupări sterile, dar aceasta nu este singura probă, aşa cum am mai arătat. Logica va deveni mai vie şi mai populară pe măsură ce vom găsi căile de atragere a ei în cîmpul activităţii ştiinţifice, pedagogice şi tehnice.

Dezvoltarea logicii moderne a dat o amploare deosebită utilizării anumitor metode de cercetare, printre care vor fi studiate aici procedeul axiomatic şi procedeul formalizării.

Importanţa metodelor logic-formale pentru cercetarea ştiinţifică a fost subliniată încă de la începuturile filozofiei moderne. S-a vorbit adesea de „metoda deductivă", termen care grupează ansamblul procedeelor logic-formale de cercetare. Astfel, Descartes ne-a dat o descriere neformală a metodei constructive (o teoretizare a procedeului inducţiei matematice şi recurenţei). Iată rezumatul celor patru reguli din *Discurs asupra metodei*:

1. Să luăm ca adevărat numai ceea ce este indiscutabil adevărat.

2. Să reducem problema dată la alte probleme mai simple şi mai uşor de rezolvat.

3. Să rezolvăm problema compusă în funcţie de părţile la care am redus-o, urcîndu-ne treptat de la simplu la compus.

4. A revedea toate cazurile pentru a nu fi omis vreunul (desigur că Descartes se referă aici la cazurile de care depinde rezolvarea problemei).

Pascal descria, la rîndul său, „metoda geometrică". Iată în traducere liberă regulile date de Pascal şi care au fost cuprinse în logica de la Port-Royal.

Reguli pentru definiţii:

I. A nu încerca să definim nimic din ceea ce este înţeles de la sine şi faţă de care nu avem termeni mai clari pentru a-l explica.

II. A nu folosi în definirea termenilor decît cuvinte perfect cunoscute sau deja explicate.

Reguli pentru axiome:

I. A nu admite nici un principiu necesar fără a fi întrebat dacă se acceptă sau nu, oricît de clar şi evident ar putea să fie.

II. A nu cere în axiome decît lucruri perfect evidente prin sine.

Reguli pentru demonstraţie:

I. A nu încerca să demonstrăm vreun lucru care este evident prin sine dacă nu avem nimic mai clar pentru a-l dovedi.

II. A dovedi orice propoziţie care este cît de cît obscură şi a nu utiliza în dovedirea ei decît axiome foarte evidente sau propoziţii deja acceptate sau demonstrate.

III. A substitui totdeauna în minte definiţiile în locul termenilor definiţi spre a evita echivocurile.

Descartes şi Pascal generalizează o experienţă ştiinţifică destul de tînără. Aşa se explică atît accentul pe care ei îl pun pe „evidenţă" cît şi folosirea termenului de axiomă într-o accepţie care azi nu ne mai poate satisface. Descartes, aşa cum am mai spus, surprinde în indicaţiile sale metodologice mai ales aspectul inductiv şi recursiv (constructiv) al gîndirii deductive, în timp ce pentru Pascal metoda axiomatică este în centrul atenţiei. Un pas înainte face Leibniz, care dezvoltă o metodologie prin analiza procesului formalizat de gîndire. Jorgen Jorgensen crede că regulile metodologice ale lui Leibniz pot fi următoarele:

I. Orice concept poate fi redus la un mic număr definit de concepte primare, care constituie „alfabetul gîndirii".

II. Conceptele compuse sînt deduse din conceptele primare numai pe baza multiplicării logice.

III. Colecţia conceptelor primare este liberă de contradicţii.

IV. Orice propoziţie este predicativă, adică ea poate fi redusă la una al cărei predicat este cuprins în subiect.

V. Orice propoziţie afirmativă este analitică, adică predicatul ei este cuprins în subiect (aici trebuie adăugat că o propoziţie este analitică dacă opusa ei este contradictorie)[1].

---

[1] Jorgen Jorgensen. *A treatise of Formal Logic*, vol. I, Copenhaga-Londra, 1931, p. 75.

Perspectivele de a aplica în diferite științe mijloacele logice ne îndeamnă să le studiem cu o sporită atenție. A le schița, a scoate în relief valoarea lor (fără a le absolutiza) și limitele lor (fără a face din acestea o prejudecată cu privire la restrîngerea din principiu a aplicabilității lor), iată scopul expunerii noastre ulterioare.

2. PROCEDEUL AXIOMATIC

Cînd vorbim despre un sistem axiomatic, putem să-l definim ca pe o realitate dată sau ca pe un oarecare aparat productiv (deci dinamic). Ca o realitate dată, un sistem axiomatic este o mulțime de propoziții, dintre care unele sînt prime (nedemonstrate), iar altele sînt derivate din primele pe baza anumitor reguli de deducție. În sensul al doilea, un sistem axiomatic este un *sistem* de anumite postulate, capabil să producă și selecționeze propoziții cu anumite caracteristici (de exemplu aceea de a fi propoziții adevărate). Orice sistem de postulate va mai fi numit „sistem deductiv". Termenul de „postulat" are mai multe accepții, însă noi îl vom folosi într-un singur sens: acela de „propoziție luată fără demonstrație" sau „propoziție nederivată în sistemul considerat". Într-un sens mai tare, postulatul este propoziția care nu poate fi demonstrată în sistemul considerat. Noțiunea de „postulat" este, așadar, relativă la un sistem concret deductiv. Din categoria postulatelor fac parte următoarele tipuri de propoziții: *axiomele, definițiile unor concepte, regulile prime* și *convențiile de limbaj*.

Axiomele sînt propoziții luate ca nedemonstrate, din care se deduc cu ajutorul regulilor alte propoziții (teoreme). În ce privește conceptele sistemului, unele sînt prime (nedefinite), altele sînt definite. Definițiile unor concepte prin conceptele prime (nedefinite) formează o altă categorie de postulate, iar convențiile de limbaj cu privire la utilizarea anumitor termeni constituie de asemenea o categorie de postulate. Nu este obligatoriu ca un sistem axiomatic să conțină toate felurile de postulate; este suficient și necesar să conțină *axiome* și *reguli* de

deducţie. Trecerea de la axiome la alte propoziţii pe baza regulilor de deducţie poartă numele de *demonstraţie*. Seria propoziţiilor care intervin într-un proces demonstrativ (începînd cu propoziţiile date — axiome sau teoreme deja demonstrate — şi terminînd cu propoziţia de demonstrat) formează o *secvenţă demonstrativă*. Să urmărim noţiunile de mai sus în legătură cu un sistem axiomatic concret (axiomatica şirului numerelor naturale).

Axiome:

1. Unitatea este un număr natural care nu urmează nici unui număr natural.

2. Oricărui număr natural n îi corespunde în mod univoc un număr n' care urmează imediat după el.

3. Orice număr natural n, cu excepţia unităţii, urmează imediat după un şi numai după un număr natural.

4. Dacă propoziţia S este demonstrată pentru unitate şi dacă din presupunerea că ea este adevărată pentru numărul natural n decurge că este adevărată pentru numărul imediat următor n', atunci propoziţia S este adevărată pentru orice număr natural.

Numărul n' mai poartă numele şi de „succesorul lui n" (adică numărul imediat următor). Axioma 4 este aşa-numita axiomă a inducţiei matematice. Ea poate fi considerată şi ca o regulă particulară de deducţie. Sistemul dat este o reformulare[1] a sistemului aritmetic al lui Giuseppe Peano*. Cele patru propoziţii descriu şirul numerelor naturale independent de teoria mulţimilor. Din ele se pot deduce restul propoziţiilor aritmeticii. Şirul numerelor naturale 1, 2, 3, ... este rezultatul operaţiei „succesor" (urmează imediat după), aplicată pornind de la elementul 1 astfel: $2 = 1'$, $3 = 2'$, $4 = 3'$, ... Acestui proces de construcţie îi corespunde sistemul de axiome indicat. În totalitatea lor, cele patru axiome pot fi considerate ca definiţia a trei concepte: „unitate", „număr natural" şi

---

[1] I. V. Arnold. *Teoreticeskaia arifmetica*, Moscova, 1939.

* În diferite lucrări, sistemul lui Peano este reformulat, păstrîndu-se, desigur, conceptele şi relaţiile fundamentale.

„succesor". Aceste concepte (sau obiecte abstracte) se definesc în sistemul de relaţii exprimat de axiomele indicate.

În afara celor patru axiome se introduc prin definiţie (recurentă) operaţiile aritmetice (adunare, scădere etc.).

Adunarea este operaţia care satisface propoziţiile

$$1)\ a + 1 = a',$$
$$2)\ a + b' = (a + b)'.$$

Pe baza celor de mai sus, vom da demonstraţia următoarei teoreme:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

(legea asociativităţii adunării)

1) $a + 1 = a'$,
2) $a + b' = (a + b)'$,
3) $b + 1 = b'$ $(1 \cdot a/b)$,
4) $(a + b) + 1 = (a + b)'$ $(1 \cdot a/a + b)$,
5) $(a + b) + 1 = a + (b + 1)$ (2, 4, reg. tranz., $b'/b+1$),
6) $(a+b)+c' = [(a+b)+c]'$ $(2 \cdot a/a+b,\ b/c)$,
7) $(a+b)+c = a+(b+c) \to [(a+b)+c]' = [a+(b+c)]'$
(se dovedeşte prin $a=b \to a'=b'$),
8) $[a+(b+c)]' = a+(b+c)' = a+(b+c')$
(prin 2),
9) $(a+b)+c' = a+(b+c')$ (6, 7, 8 reg. tranz.),
10) $(a+b)+c = a+(b+c)$ (ax. 4).

Seria de formule 1—10 este secvenţa demonstrativă a teoremei considerate. În dreapta fiecărei propoziţii am indicat în paranteze punctul de plecare şi modul în care se demonstrează. Secvenţa noastră demonstrativă constă, evident, din mai multe secvenţe. În demonstraţie au intervenit şi următoarele reguli logice: regula substituţiei, regula *modus ponens* şi regula tranzitivităţii, reguli care în sistemul considerat sînt presupuse şi nu formulate expres.

Sistemele axiomatice sînt de două tipuri: *intuitive* şi *formalizate*. În sistemul intuitiv, expresiile au *sens şi se operează cu ele în virtutea sensului*. Astfel, geometria lui Euclid *(Elementele)* constituie un exemplu de sistem intuitiv. Sistemul axiomatic dat mai sus este cvasiintuitiv. Aceasta înseamnă că, deşi expresiile au sens, operaţiile totuşi se fac pur formal, sensul respectiv nejucînd vreun rol în aceste operaţii.

În sistemul descris mai sus ne-am bizuit pe un grup de axiome. Există și sisteme în care apar numai definiții și reguli sau chiar numai reguli. Astfel, calculul neaxiomatic (algebric) al propozițiilor se bazează pe definițiile funcțiilor (de exemplu definițiile matriceale) sau pe definițiile funcțiilor, definiția formei normale conjunctive și regulile de aducere la forma normală conjunctivă. Gerhard Gentzen și Jaskowski au construit calcule care se bazează numai pe reguli; este vorba de așa-numitele „calcule naturale". Vom putea deci clasifica sistemele de postulate în a) axiomatice, b) definiționale și c) naturale. Deoarece sistemele axiomatice sînt cele mai obișnuite sisteme deductive, ne-am oprit în special la acestea. Printre problemele cele mai importante referitoare la sistemele axiomatice, reținem semnificația lor gnoseologică și valoarea metodologică.

Sistemele axiomatice, ca orice sistem de gîndire, au apărut, așa cum arăta Engels, din nevoia eternă a spiritului omenesc de a depăși contradicțiile. *A exista* în concepția lui Hilbert înseamnă *a fi necontradictoriu*, iar noncontradicția este principala proprietate pe care trebuie s-o satisfacă orice sistem deductiv; ea este prima garanție (garanție formală) a faptului că teoria este adevărată. Într-un sistem axiomatic se dezvăluie legăturile interne (logice) dintre concepte și propoziții, punîndu-se în acest fel adevărul unora în dependență de adevărul altora, adevărul teoremelor în funcție de adevărul axiomelor (și în general al postulatelor; se înțelege, nu al postulatelor nominale), cu alte cuvinte sistemul axiomatic asigură *verificabilitatea formală* a unor propoziții prin altele, reduce adevărul unor propoziții la adevărul altora (al axiomelor)*. Această reducție are o importanță capitală: ea ne scutește de a mai verifica prin experiență fiecare propoziție a teoriei. Legătura cu experiența rămîne să fie făcută doar printr-un număr minim de propoziții (axiomele). Faptul că există un număr minim de propoziții ireductibile la celelalte *(în sistemul dat)* exprimă imposibili-

---

* Dacă deducția unei propoziții din altele poate fi considerată ca o operație „analitică", reducția unei mulțimi de propoziții la axiome este o operație „sintetică" (se dezvăluie în acest fel unitatea mulțimii de propoziții). Reducțiile se fac din aproape în aproape pînă ce se ajunge la un grup sau altul de propoziții ireductibile.

tatea eliminării legăturii cu experiența, cu gîndirea intuitivă nesistematizată, cu etapele inferioare ale cunoașterii*. Cum am mai putea să explicăm ce este „unu", „numărul natural" și „urmează imediat după" (succesorul) decît apelînd la intuiție, la experiența neprelucrată teoretic, o dată ce am luat aceste concepte ca primitive? Ce justificare decît simpla observație am putea să mai dăm propoziției care spune că „oricărui număr natural *n* îi corespunde în mod univoc un număr *n'* care urmează imediat după el"? Pe de altă parte, putem noi vorbi în mod absolut de o asemenea justificare? Putem noi experimenta în toată generalitatea ei propoziția dată? Evident că nu. Nu putem spune decît că ea codifică o experiență destul de obișnuită, dar nimeni nu poate sconta pe o asemenea verificare în mod absolut. Aceasta nu înseamnă că experiența are un rol minor în probarea veridicității lor. Dimpotrivă, ea are rolul capital, căci toate celelalte proprietăți ale acestor axiome vor constitui pentru noi doar condiții necesare de adevăr; ultima piatră de încercare rămîne experiența, ea singură ne arată dacă înseși proprietățile respective pot fi luate ca o justificare a adevărului. Se pune o întrebare: am arătat că adevărul teoremelor este pus în dependență de adevărul axiomelor, dar adevărul axiomelor nu depinde în nici un fel de adevărul teoremelor? O proprietate formală a sistemului axiomatic, independența, pare să arate tocmai ireductibilitatea adevărului axiomelor la adevărul teoremelor, căci nici o axiomă nu trebuie să fie dedusă din alte propoziții ale sistemului. Cu toate acestea, lucrurile nu stau astfel. Este drept că adevărul nici unei axiome nu trebuie pus în dependență deductivă de alte propoziții ale sistemului, așa cum se întîmplă cu teoremele (în caz contrar am avea un cerc vicios: teoremele se deduc din axiome, iar axiomele din teoreme!); cu toate acestea, axiomele depind de teoreme în alt sens: în sensul dat tot printr-o proprietate formală, și anume *completitudinea*. Axiomele sînt acceptate dacă din ele se pot deduce

* „Orice fundamentare a matematicii sau logicii — scrie A. Church — conține într-adevăr, într-o anumită măsură, un cerc vicios, deoarece există totdeauna premise nefundamentate care trebuie să fie acceptate pe bază de credință sau intuiție. Noi putem încerca să micșorăm numărul acestor premise, dar nu le putem distruge" (*Matematics and logic*, în *culegerea citată*, p. 185).

toate propoziţiile adevărate care pot fi formate în sistemul considerat. În sistem nu trebuie să se deducă vreo propoziţie falsă (sau contradictorie). Dar de unde să ştim că o propoziţie nu este falsă înainte de a o deduce din axiome? Se înţelege, din experienţă. Iată deci că experienţa intervine din nou. *Sistemul nu este verificat numai prin axiome, ci şi prin consecinţele sale.* Această situaţie îşi găseşte expresia în două propoziţii care guvernează deducţia:

a) dacă premisele sînt adevărate, atunci concluziile sînt adevărate (cu alte cuvinte, în cazul nostru, adevărul axiomelor garantează adevărul teoremelor);

b) dacă concluziile sînt false, atunci premisele sînt false (respectiv, dacă teoremele sînt false, axiomele din care se deduc vor fi false).

„Adevărul, *verificarea prin practică, străjuieşte deci începutul şi sfîrşitul mecanismului logic*", scrie acad. Ath. Joja. Nu ne putem dispensa de verificarea prin practică, prin experienţă, oricît ar fi ea de aproximativă. În definitiv, în trecerea de la axiome la teoreme nu se produce decît un transfer de adevăr dobîndit prin experienţă, şi cît adevăr conţin axiomele atîta se transferă. Deducţia nu poate adăuga nimic de la sine; ea doar transportă de la premise la concluzie adevărul pe care am reuşit să-l obţinem din practică, din experienţă. La rîndul lor, concluziile supuse probei practice dezvăluie, în cazul falsităţii lor, caracterul indiscutabil fals al premiselor şi prin adevărul lor *probabilitatea* adevărului premiselor. Toate acestea ne arată că *un sistem axiomatic nu este o garanţie suficientă, un criteriu absolut al adevărului propoziţiilor sale că el este ancorat prin începutul şi sfîrşitul său în practică, în experienţă, fiind, în definitiv, puntea de trecere de la o experienţă la alta.*

Se pune acum întrebarea: oare la atît să se rezume rolul unui sistem axiomatic? Din punctul de vedere al reflectării să nu aducă el nimic nou faţă de propoziţiile sale luate în parte? Acest lucru nu poate fi spus. Există o anumită latură a realităţii care nu poate fi reflectată de nici o propoziţie în parte; aceasta este sistemul (reţeaua de relaţii a) obiectelor din domeniul considerat. *Reţeaua relaţiilor obiective nu poate fi reflectată decît*

de ceva asemănător cu ea, și anume de rețeaua propozițiilor noastre, de sistemul conceptului. Fără a înțelege acest lucru în mod rigid (de exemplu în sensul că ordinea sistemului conceptual exprimă *întocmai* ordinea sistemului real), adevărul său este incontestabil, căci legătura determinărilor obiectului este singura care ne dă posibilitatea să stabilim legătura logică între propozițiile (și conceptele) corespunzătoare acestor determinări. Aceasta ne face să corectăm întrucîtva afirmațiile noastre cu privire la rolul deducției: rolul ei nu se rezumă la un transport de adevăr de la unele propoziții la altele, ci, prin legătura pe care o stabilește între propoziție, ea reflectă anumite legături reale existente între determinările oglindite de fiecare propoziție. Așadar, un sistem axiomatic este necesar nu numai sub aspectul sistematizării cunoștințelor în vederea verificării lor una prin alta și deci a eliminării eventualelor propoziții false (sau contradictorii), ci el este necesar chiar în sensul reflectării, al reflectării sistemului real prin sistemul conceptual. Un sistem deductiv (deci și un sistem axiomatic), așa cum am mai spus, constituie ceea ce am numit „sistemul conceptului". Cunoaștem din logica generală două operații importante asupra noțiunii: generalizarea și determinarea; se pune problema: cum apar aceste operații atunci cînd ne raportăm direct la sistemul conceptului?

Dacă considerăm sistemele logice, vom observa că fiecare dintre aceste operații are două sensuri: *a*) unul privitor la mulțimea propozițiilor care pot fi deduse în sistem (sensul comprehensiv) și *b*) altul privitor la mulțimea valorilor de adevăr ale funcțiilor propoziționale (sensul extensiv). Să considerăm, de exemplu, un sistem S_1 clasic al propozițiilor care conține printre axiomele sale legea terțului exclus (sau o axiomă de aceeași putere cu această lege). Prin *suprimarea* acestei axiome obținem o generalizare în sens extensiv a sistemului dat, respectiv trecem la sistemul S_2 (un sistem *n*-valent, care poate fi, de exemplu, un sistem intuiționist cu o infinitate de valori). Acestei generalizări extensive îi corespunde o determinare comprehensivă în sensul că posibilitățile deductive ale sistemului S_2 sînt mai mici decît posibilitățile sistemului S_1; altfel spus, în sistemul S_1 se pot deduce mai multe propoziții adevărate decît în siste-

mul S_2. Invers, anexînd la sistemul S_2 sus-amintita axiomă a terțului exclus, obținem un sistem S_1 care sub raportul valorilor logice este mai restrîns decît primul (de exemplu se poate trece de la un sistem „constructivist" la unul „clasic"), iar sub raportul comprehensiunii (al mulțimii propozițiilor adevărate care pot fi demonstrate în sistem) este mai bogat. Suprimarea unei axiome echivalează cu eliminarea unei însușiri specifice conceptului și deci cu o *generalizare* (se extinde domeniul de obiecte vizate), în timp ce anexarea unei axiome (independentă de cele date) echivalează cu introducerea unei însușiri specifice unui domeniu (eventual subdomeniu) și deci cu o *determinare*. În acest fel, ideea „concept-sistem", introdusă de noi într-un capitol anterior, constituie o precizare a ideii de „concept clasic".

Generalizarea și determinarea axiomatică constituie procedee de a descrie diferite domenii de obiecte fără a mai apela la calea empirică. Pe această cale, gîndirea abstractă (= prin procedee formale) capătă o mare independență față de analiza intuitivă concretă a obiectului, însă împingerea prea departe a unei asemenea independențe a gîndirii abstracte este pîndită de pericolul paradoxelor, de exemplu, atunci cînd vrem să explicăm cu ajutorul sistemului obținut pe cale abstractă un obiect concret. Oricît ar merge de departe gîndirea abstractă (formală), ea nu se poate dispensa de legătura cu gîndirea intuitivă și deci cu concretul, căci în definitiv rezultatele gîndirii abstracte trebuie să-și găsească aplicație la obiecte concrete, însă legătura dintre aceste rezultate și obiect nu se face în mod automat fără o anumită cercetare. Pe scurt, gîndirea formală și deci procedeul axiomatic nu se poate dispensa de gîndirea concretă, ci o presupune în începutul ei și în aplicarea rezultatelor ei.

Spre exemplificarea unor idei enunțate mai sus, vom considera sistemul axiomatic al propozițiilor construit de Hilbert și Ackermann. Acest sistem constă din patru axiome:

1) $(p \vee p) \rightarrow p$,

2) $p \rightarrow (p \vee q)$,

3) $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$,
4) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(r \vee p) \rightarrow (r \vee q)]$

şi două reguli de deducţie (regula substituţiei şi *modus ponens)*, precum şi o serie de definiţii.

Prin suprimarea ax. 1) nu mai poate fi demonstrată formula $\bar{p} \vee p$ şi nici $p \vee \bar{p}$ (deci formulele terţului exclus). Suprimarea ax. 2) are aceleaşi rezultate. Suprimarea ax. 3) duce la suprimarea teoremei $p \rightarrow \bar{\bar{p}}$ şi, în continuare, a teoremei $\bar{\bar{p}} \rightarrow p$ (legea dublei negaţii), iar suprimarea ax. 4) face imposibilă demonstrarea teoremei dublei negaţii. În acest fel, fiind eliminate legea terţului exclus şi a dublei negaţii, se trece de la sistemul cu două valori la un sistem mai general n-valent ($n > 2$). Oricare ar fi sistemul la care ajungem, numai din considerente formale nu vom şti niciodată care anume este obiectul descris, chiar dacă sistemul axiomatic este *intuitiv* şi nu *formal*. Descrierea prin procedee formale a obiectului nu ne dispensează de determinarea (aflarea) lui cu procedee practice şi intuitive. În cazul nostru nu vom putea spune dacă cele descrise sînt mulţimile infinite, sînt propoziţiile cu valoare aproximativă sau altele.

Hilbert, care are deosebite merite în perfecţionarea metodei axiomatice, îşi pusese speranţe absolute în această metodă. Cu timpul s-a arătat însă că nici măcar întreaga matematică nu este axiomatizabilă (vezi în acest sens teorema lui Gödel). Ne oprim aici cu prezentarea specială a procedeului axiomatic. De fapt însă în paragraful următor ne vom mai referi în mod inevitabil la acest procedeu.

3. FORMALIZARE. METODĂ. FILOZOFIA FORMALISTĂ

Cînd vorbim de metoda formalizării, mai ales că discuţia se poartă în planul filozofiei, nu putem să nu facem o incursiune în ceea ce se numeşte „formalismul matematic". Formalismul matematic desemnează deopotrivă o metodă şi o filozofie. Vom distinge net între metoda formalizării şi filozofia născută pe baza interpretării eronate a acestei metode.

Apariţia paradoxelor logice în corpul construcţiilor matematice la sfîrşitul secolului al XIX-lea i-a mobilizat pe matematicieni spre găsirea unor mijloace pentru a depăşi situaţia constituită, situaţia de „criză a matematicii". Logiciştii, prin persoana lui B. Russell, au căutat să rezolve problema prin teoria tipurilor, teorie care pune restricţii modului de formare a expresiilor şi cere o reglementare riguroasă a operaţiei de substituţie. Teoria tipurilor însă, prin cerinţa de a elimina orice definiţie nepredicativă, a dus la eliminarea unei mari părţi din analiza matematică, analiză care tocmai se baza pe asemenea definiţii*. Pe de altă parte însă, această teorie nu era o garanţie suficientă de necontradicţie. Aceasta şi alte obiecţii aduse teoriei tipurilor i-au îndemnat pe matematicieni să caute soluţia în altă direcţie, fără a elimina însă toate rezultatele dobîndite de Russell. Existau în matematică şi alte resurse pentru a încerca depăşirea gravei situaţii. Metoda clasică de a demonstra necontradicţia unei teorii era *modelul*. „*Model* pentru o teorie axiomatică este pur şi simplu un sistem de obiecte luat din altă teorie care satisface axiomele teoriei date"[1]. De exemplu, „geometria analitică a lui Descartes, adică folosirea coordonatelor pentru reprezentarea obiectelor geometrice, este metodă generală pentru stabilirea noncontradicţiei teoriilor geometrice pe baza analizei, adică a teoriei numerelor reale"[2]. Beltrami a obţinut unele rezultate în vederea demonstrării noncontradicţiei geometriei lui Lobacevski—Bolyai prin geometria lui Euclid. Felix Klein a folosit în acelaşi sens metodele geometriei proiective. Hilbert a construit un model al geometriei euclidiene cu mijloacele aritmeticii numerelor naturale.

---

* Definiţiile nepredicative sînt acele definiţii în care termenul *definitor* presupune pentru construcţia sa termenul de definit. De exemplu, în definiţia „limita superioară a unei mulţimi de numere reale este cel mai mare număr din această mulţime", condiţia definitorie „cel mai mare număr din această mulţime" nu poate fi construită fără „această mulţime". Termenii categoriali („materie", „spirit", „cantitate", „calitate", „spaţiu", „timp" etc.) nu pot fi definiţi altfel decît nepredicativ.

[1] S. C. Kleene. *Op. cit.*, p. 53.

[2] Ibidem, p. 54.

„Demonstrația noncontradicției prin metoda modelelor este relativă. Teoria, pentru care se construiește un model, este necontradictorie dacă este necontradictorie acea teorie din care se ia modelul"[1]. În primul rînd, în aplicarea la aritmetica clasică, la analiză și la teoria mulțimilor, asemenea metodă nu inspiră vreo încredere. În această si uație, David Hilbert a căutat soluții pe altă linie.

O studiere mai atentă a calculului putea oferi asemenea posibilități. Calculul, formă de gîndire proprie matematicii pînă în secolul al XIX-lea, iar apoi, după apariția cărții lui G. Boole despre legile gîndirii și logicii, are o caracteristică importantă: *decurge pur formal*. Caracterul formal al calculului nu înseamnă un formal în sensul logicii aristotelice, adică o abstracție de orice *conținut determinat*, ci, mai mult, *abstracție de orice conținut*. Această proprietate a „gîndirii matematice" a fost atent studiată și folosită de școala de la Göttingen, în frunte cu David Hilbert. Să urmărim pe un exemplu modul în care decurge gîndirea calculatoare.

Fie sistemul de două ecuații

$$\begin{cases} x + a = b, \\ x + y = c, \end{cases}$$

unde x, y reprezintă necunoscute, iar a, b se presupun determinate. Să se afle valoarea necunoscutelor. Cînd facem cunoștință cu semnele $x, y, \ldots, a, b, c, \ldots, +, \ldots$ și $=$, știm exact la ce se referă aceste semne. Ele sînt pentru noi „cuvinte" sau *simboluri a ceva*, desemnează ceva, deci au un conținut. Să vedem cum rezolvăm. Aplicăm metoda substituției. Obținem întîi valoarea lui x din prima ecuație și o substituim în locul lui x din ecuația a doua. Iată șirul operațiilor:

$$1)\ x = b - a,$$
$$2)\ (b - a) + y = c,$$
$$3)\ y = c - (b - a),$$
$$4)\ y = c - b + a.$$

Aceste operații s-au făcut după următoarele reguli:

1) se trece a în dreapta cu semn schimbat;

---

[1] Ibidem.

2) se substituie valoarea lui x în locul lui x din ecuația a doua;

3) se trece $(b - a)$ în partea a doua cu semn schimbat;

4) se desfac parantezele, schimbîndu-se semnele.

Desigur, aceste reguli pot fi formulate în general pentru orice x, y, ... și a, b,... Este ușor de observat că, în rezolvarea problemei de mai sus, faptul că semnele se referă la numere n-a jucat absolut nici un rol. În fond totul s-a redus la o manipulare mecanică a semnelor (literelor) după reguli cunoscute. *Esențialul în aceste operații a fost, așadar, cunoașterea sistemului de reguli de manevrare a semnelor (desenelor) și nu conținutul lor.* Ei bine, tocmai în aceasta constă caracterul pur formal al calculului. Acest șir de operații pur formale revine în ultimă instanță la un simplu șir de operații materiale, pe care le facem cu mîna pe hîrtie după anumite reguli. Ceva întru totul asemănător cu jocul de șah; deosebirea, de altfel teoretic neesențială, constă aici în faptul că „jocul" se face cu desene (urme materiale pe hîrtie) și nu cu piese de lemn sau fildeș. Desigur, fiecare dintre cele două jocuri are un alt scop: jocul de șah are un scop pur distractiv, de a-l pune pe adversar în situația de a ceda „regele", pe cînd aici este vorba de a găsi valoarea unei necunoscute. *Funcția celor două tipuri de combinații materiale reglementate este deci esențialmente deosebită.* Semnele x, y,..., a, b, c, ..., $+$, ... și $=$ fac parte din vocabularul limbajului matematic. Fiind cuvinte, ele au, desigur, o semnificație (desemnează ceva). Acest lucru trebuie știut de la început pentru a putea ști ce *problemă rezolvăm* cu ajutorul lor. Acest lucru nu mai este necesar „pe traseul operațional" *(Ath. Joja)*, dar el devine din nou necesar la sfîrșitul operațiilor, cînd citim rezultatele: „valoarea lui x este cutare..., valoarea lui y este cutare...". Vom spune că rezolvarea problemei s-a făcut *în mod pur formal*. Procedeul aplicat este un procedeu formal. Procedeele formale sînt aplicate în matematică chiar de la apariția ei. În fond, socoteala făcută pe răboj sau cu bețișoare, pietricele era un model perfect de „gîndire formală". Această gîndire pur formală este, după cum se exprimă prof. S.A. Ianovskaia, „un mod de eliminare a abstracției". Într-adevăr, după cum s-a văzut mai sus, noi eliminăm

în operațiile făcute orice conținut și deci orice abstracție cuprinsă de simboluri. Gîndirea abstractă este înlocuită de o „gîndire cu obiecte", de operații practice. Singurul rost al gîndirii se reduce la indicarea comenzilor (a regulilor) de operare practică cu desene pe hîrtie. Vom numi o astfel de gîndire „gîndire formalizată" și o definim după cum urmează: *gîndirea formalizată este operarea numai cu forma materială a limbii, abstracție făcînd de orice conținut al acesteia*. Aceasta este posibilă, deoarece limba ca formă materială a gîndirii este un sistem de semne și de reguli pentru aplicarea acestor semne. Este necesar ca între semnele limbii și obiecte să existe raporturi univoce, riguros reglementate, pentru a putea opera pur formal. Această condiție o îndeplinește limbajul simbolic. Tocmai de aceea gîndirea formalizată se efectuează în mod sistematic acolo unde ea dispune de un limbaj simbolic.

b) *Ce sînt sistemele formale?*

Am văzut mai sus ce înseamnă „gîndire formalizată". Știm că matematica dispune de multe procedee formale pentru a rezolva problemele despre numere. Știința matematicii nu se reduce la rezolvarea unor probleme despre numere, știința matematică se dezvoltă ca un tot unitar, constituie cu alte cuvinte ea însăși un proces cu o anumită continuitate. Se pune problema organizării sistemului de cunoștințe la care se ajunge în acest proces la un moment dat. *Tocmai această încercare de a fixa fluxul dezvoltării matematice într-un moment organizat (un sistem riguros) a dus la apariția paradoxelor în corpul științei matematice*. Sistemul matematicii conține pe lîngă mulțimea propozițiilor despre numere (și, în general, despre raporturile cantitative) și o serie de raporturi logice interne (legături între propoziții) și chiar aserțiuni despre aceste legături. Logica matematică adusese cu sine posibilitatea de a rezolva problemele sale asemenea matematicii cu ajutorul procedeelor formale. Pentru aceasta ea dispunea de un puternic aparat simbolic. Se putea deci aplica

acest aparat la organizarea sistemului științei matematice. În această posibilitate de aplicare a formalizării la organizarea teoriilor matematice vede David Hilbert și posibilitatea de a depăși starea paradoxală, deci „criza matematicii". Care a fost raționamentul lui Hilbert? Hilbert a raționat astfel: „Eu, cel puțin, am crezut că pot să se contrazică unele pe altele numai enunțurile și propozițiile, avînd în vedere că ele pot să ducă prin intermediul raționamentelor la noi enunțuri și mi se pare că părerea conform căreia înseși faptele și evenimentele pot să se contrazică unele pe altele este un exemplu clasic de nonsens"[1]. Ar trebui deci să eliminăm această gîndire cu propoziții (gîndirea cu abstracții), care duce la contradicții, cu o gîndire care în mod principial nu poate duce la asemenea contradicții, o „gîndire" care s-ar reduce la „fapte", la „evenimente". Un exemplu de asemenea „gîndire" ne este oferit de *calculul matematic*: operăm cu lucruri nu cu idei. Hilbert și școala sa s-au apucat de lucru: reconstrucția matematicii pe baze pur formale. Un nou program de lucru își făcea loc în fundamentele matematicii, așa-numitul „program al lui Hilbert". El consta din două puncte: a) formalizarea matematicii și b) demonstrația de noncontradicție. Prin metoda *axiomaticii formale* se spera că „antinomiile logice se îndepărtează datorită anumitor limitări puse de sistemele axiomatice în ce privește demonstrațiile de existență, iar antinomiile semantice nu-și găsesc loc în sistemele axiomatice (formale. — *Gh. E.*), deoarece noțiunile semantice care joacă în deducerea lor un rol de bază, de exemplu «adevăr», «definit», «desemnează» ș.a., pur și simplu nu pot fi exprimate în limbajul acestor sisteme axiomatice"[2]. Cum se va arăta, a doua parte a acestei teze nu este întru totul adevărată. Toată matematica trebuia redusă la un sistem de semne în care se operează exclusiv formal după reguli date. „Pentru a avea de-a face cu un asemenea sistem, ar fi suficient un minimum de intuiție, așa-numita „intuiție globală", necesară pentru a putea decide dacă două

---

[1] D. Hilbert. *Bazele geometriei*, anexa „Despre infinit", p. 341.
[2] A. A. Fraenkel și Bar-Hillel. *Op. cit.*, p. 266—267.

simboluri considerate coincid sau nu (mai exact, aparţin ele sau nu aceluiaşi tip de simboluri)"[1].

Care sînt momentele istorice care au permis dezvoltarea metodei formalizării sau a metodei sistemelor formale? Noi credem că acestea sînt următoarele: dezvoltarea procedeului axiomatic (Aristotel, Euclid), introducerea şi perfecţionarea limbajului simbolic (în speţă dezvoltarea operaţiilor cu variabile), dezvoltarea logicii simbolice, axiomatizarea unor teorii matematice. Toate aceste etape au pregătit apariţia sistemelor formale, a căror noţiune o vom defini acum. Noţiunea de sistem formal este definită adeseori în diferite feluri. Unele definiţii se referă la sistemul formal ca la o realitate dată: *mulţimea formulelor axiome şi teoreme dispuse în ordine demonstrativă*; altele, dimpotrivă, definesc sistemul formal ca pe un *aparat productiv*. Definiţia noastră se va încadra în acest ultim tip. Vom introduce noţiunea de sistem formal ca o abstracţie efectuată pornind de la noţiunea de *limbaj simbolic al teoriei*. Limbajul simbolic (al unei teorii) constă din semne şi reguli de operare cu semnele. Semnele pot să fie de diferite tipuri (în funcţie de nevoile concrete). Regulile vor fi împărţite în primul rînd în două: clasa regulilor formale („sintactice") şi clasa regulilor semantice. Regulile formale se împart, la rîndul lor, astfel: 1) reguli de formare (arată modul în care formăm unele expresii pornind de la altele), 2) reguli de transformare (arată cum se poate trece de la o expresie corect formată la o altă expresie corect formată fără a schimba valoarea expresiei)*, 3) reguli de selecţionare (arată cum putem separa o clasă de expresii cu anumite proprietăţi din mulţimea totală a expresiilor corect formate). La rîndul lor, regulile semantice sînt de două feluri: 1) reguli de desemnare (arată semnificaţia variabilelor şi a expresiilor compuse), 2) reguli de

[1] I b i d e m, p. 298. Cu titlu informativ amintim că problema dacă două simboluri sînt identice nu este rezolvabilă formal. De exemplu, nu putem rezolva formal dacă x din formula „$F(x)$" este identic ca x din formula „$\forall x\ F(x)$". În ce priveşte termenul de „simbol", el mai este aplicat obiectelor formale (litere etc.) numai în virtutea faptului că înainte de formalizare aceste obiecte (litere) au avut o semnificaţie.

* „Regulile de formare nu sînt în realitate decît definiţia conceptului de «propoziţie»; regulile de transformare dau definiţia conceptului de «consecinţă imediată»" (R. C a r n a p. *Le problème de la logique de la science*, Paris, 1935, p. 15).

adevăr (definesc şi, eventual, arată cum putem forma expresii adevărate pornind de la alte expresii adevărate). *Vom numi sistem formal orice sistem de semne şi de reguli care se obţine dintr-un limbaj simbolic (aşa cum a fost descris mai sus) prin eliminarea regulilor semantice (reguli de desemnare şi adevăr)*. Acest aparat productiv, prin punere în funcţiune, dă naştere unui sistem formal în sensul static al cuvîntului, adică o mulţime de formule (formată, la rîndul ei, din anumite submulţimi). Capacitatea de a produce a acestui sistem formal este nelimitată dacă lista semnelor este nelimitată sau utilizarea aceluiaşi semn nu este limitată. Distincţia dintre sistemul formal ca aparat productiv şi sistemul formal ca rezultat (ca produs) nu se face în mod obişnuit, deşi nevoia ei se resimte chiar în exprimări, căci nimeni nu se mulţumeşte cu un simplu sistem „mort" (static). Astfel, Roger Martin, vorbind despre logica matematică, scrie: „Idealul său este stabilirea unui *sistem care să permită trecerea* de la o configuraţie de semne la alta în virtutea regulilor prealabil definite, fără a considera altceva decît semnele şi fără a face să intervină proprietăţile obiectelor pe care aceste semne pot să le reprezinte. Un asemenea sistem este numit *sistem formal*"[1]. Pe de altă parte, atunci cînd R. Martin trece la definirea noţiunii de sistem formal, el defineşte o realitate construită (p. 13). Or, o mulţime de formule *date* prin sine nu este un „sistem care să permită trecerea de la o configuraţie de semne la alta", ea însăşi nefiind altceva decît o ... mulţime de configuraţii. Dacă presupunem că mulţimea respectivă este formată din configuraţiile k_1, k_2, ..., k_n, atunci avem două posibilităţi:

a) sau este vorba să trecem de la o configuraţie k_i la o configuraţie k_j, ambele date în această mulţime;

b) sau este vorba să trecem de la o configuraţie a acestei mulţimi la una care nu există încă în această mulţime.

În primul caz, *trecerea* n-ar mai avea nici un sens (ea fiind făcută în momentul în care am construit configuraţia k_j); în al doilea caz, *trecerea* ar depăşi limitele sistemului dat şi deci ea nu s-ar putea face... în virtutea acestui sistem, ci în virtutea

[1] Roger Martin. *Logique contemporaine et formalisation*, Paris, 1964, p. 6 (subl. ns.).

unor reguli exterioare sistemului. Un asemenea sistem static nu poate avea în nici un chip virtuți productive (și în general dinamice). În el sau *totul ar fi deja demonstrat sau nimic nu s-ar putea demonstra, căci ceea ce s-ar demonstra ar însemna o trecere peste limitele lui*. Va trebui deci să vorbim de o mulțime de configurații *în devenire* (deschisă), mulțime care se dezvoltă datorită punerii în mișcare a unui sistem formal capabil *să producă* și *să selecționeze* în mod nelimitat formule. Cu toate acestea, noțiunea statică de sistem formal se dovedește în multe cazuri indispensabilă, căci aparatul productiv se verifică prin rezultatele sale. Mi se pare că această concepție convine unei viziuni constructive asupra gîndirii. În scopul de a deosebi fără parafrazări sistemul formal ca aparat productiv de produsul acestui aparat, vom folosi pentru prima noțiune abrevierea *SFP*, iar pentru a doua vom scrie pur și simplu *SF*. Noțiunea *SF* impune încă o serie de precizări. Nici o regulă dintre cele enumerate nu face parte din *SF*. De asemenea nici o afirmație asupra *SF* nu face parte din *SF* (vezi Roger Martin). Fraenkel și Bar-Hillel introduc în mod greșit regulile de deducție în *SF*. Aceasta arată că ei nu disting clar între *SFP* și *SF*, ceea ce în alt plan revine la a confunda *metateoria* (teoria în care se studiază *SF*) cu obiectul ei (*SF*).

În definiția noastră n-am ținut seama de ideea de axiomă, așa cum fac o serie de autori, deoarece nu considerăm sistemele formale axiomatice decît ca pe o specie de sisteme formale pe lîngă altele (de exemplu „calculul natural" al lui Gentzen). Axiomele pot apărea într-o primă regulă de selecționare (așa cum variabilele propoziționale apar în regula care le postulează ca formule): formulele $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sînt selecționate (și $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sînt tocmai axiomele), cu alte cuvinte sînt postulate ca „teoreme" (ceea ce se și face).

În reflecțiile care urmează vom avea în vedere *sistemele formale axiomatice*, avînd în vedere că au constituit obiectul atenției matematicienilor. În diferite lucrări, termenul de „sistem formal" este luat ca sinonim cu alți termeni. Iată acești termeni sinonimi indicați de Fraenkel și Bar-Hillel: formalism, calcul, calcul formal, calcul neinterpretat, calcul abstract,

sistem sintactic, limbaj formal, logică formală, codificat ş.a. Desigur, nu rezultă de aici că, în genere, identificarea acestor termeni este justificată.

În continuare vom exemplifica ideea de sistem formal prin sistemul formalizat al „algebrei lui Boole". şi sistemul lui Peano.

Algebra booleeană

I. *Semne*:

1) 1, 0 constante,

2) $a, b, c, \ldots$ variabile,

3) $.$, $\vee$, $\neg$ operatori,

4) ( ), [ ] semne auxiliare.

II. *Reguli de formare*:

1) Fiecare semn din grupa I_1 şi grupa I_2 este formulă;

2) Dacă A este formulă, atunci $\neg A$ este formulă;

3) Dacă A, B sînt formule, atunci $A.B$ este formulă;

4) Dacă A, B sînt formule, atunci $A \vee B$ este formulă.

III. *Regulile de transformare* (se cer atunci cînd vrem să lucrăm cu formule „canonice", de exemplu cu forme normale).

IV. *Regulile de selecţionare*:

1) Următoarele formule se consideră selecţionate:

a) $a \vee 0 = a$; b) $a.1 = a$; c) $a \vee b = b \vee a$ etc. (în genere se indică aici un grup de axiome);

2) Orice formulă obţinută pe baza unor formule din grupa IV_1 cu ajutorul regulilor de deducţie (se arată care anume) va fi de asemenea formulă selecţionată („teoremă").

Sistemul formalizat al lui Peano

I. *Semne*: 0, N, $'$

II. *Axiome*:

Ax 1. $0 \in N$;

Ax 2. Dacă $n \in N$ atunci $n' \in N$;

Ax 3. Dacă $n \in N$ atunci $n' \neq 0$;

Ax 4. Dacă $m \in N$ şi $n \in N$, atunci $m' = n'$ numai dacă $m = n$;

Ax 5. Dacă P este o submulţime a lui N astfel că a) $0 \in P$, b) ori de cîte ori $n \in P$, $n' \in P$, atunci $P = N$.

III. *Reguli de deducție* (o serie de reguli logice, cum sînt: regula substituției, regula *modus ponens*, regula tranzitivității).

Folosind deja rezultatele dobîndite de înaintașii lor pe linia axiomatizării matematicii (Frege și Russell, Peano și Zermello), Hilbert împreună cu colaboratorul său Bernays au construit sistemul formal al matematicii (nu al întregii matematici) din *Grundlagen der Mathematik*.

Odată rezolvată problema formalizării, a construirii sistemului formal, era necesar să se treacă la a doua parte a punctului din program, *demonstrația de noncontradicție*. „În calitate de al doilea pas, Hilbert și-a propus să demonstreze că aplicarea regulilor de deducție la axiome nu poate duce niciodată la contradicție, mai exact la *contradicție formală (inconsistency)*, într-unul dintre sensurile acestui termen..., de exemplu în sensul că nu se poate găsi o demonstrație formală care să se încheie cu formula $1 = 2$"[1]. Pentru a evita apariția unor contradicții datorate procedeelor logice, Hilbert și-a propus să elimine toate acele procedee pe care logiciștii și intuiționiștii le supuseseră criticii (de exemplu definițiile nepredicative și terțul exclus). Teoria care trebuia să se ocupe de studiul metodelor de demonstrație în matematică a fost numită de Hilbert *metamatematică*. În metamatematică sînt admise numai *metode finitiste*. Aceste metode au fost descrise clar de către Herbrand: „Prin raționamente intuiționiste (adică finitiste) înțelegem raționamentele care satisfac următoarele condiții: întotdeauna se consideră numai un număr finit și determinat de obiecte și funcții; funcțiile acestea sînt exact definite și definiția permite calcularea univocă a valorilor lor; niciodată nu se afirmă existența vreunui obiect fără indicarea procedeului de construire a acestui obiect; niciodată nu se consideră (pe deplin determinată) mulțimea tuturor obiectelor *x* ale unei totalități infinite oarecare; dacă, totuși, se spune că raționamentul (sau teorema) cutare este adevărat pentru toți acești *x*, aceasta înseamnă că acest raționament general poate fi repetat pentru fiecare *x* concret

---

[1] A. Fraenkel și Y. Bar-Hillel. *Op. cit.*, p. 267–268.

şi însuşi acest raţionament general trebuie considerat doar ca model de a forma asemenea raţionamente concrete"[1].

Hilbert considera că, odată demonstrată noncontradicţia sistemului, *existenţa* obiectelor este garantată chiar prin aceasta, căci a exista = a fi necontradictoriu în concepţia sa. Însă un sistem este caracterizat nu numai prin noncontradicţie, ci şi prin puterea sa de rezolvare (eficienţa sa). Un sistem este considerat eficient (sau efectiv definit) dacă „putem decide printr-o metodă fixată dinainte şi într-un număr finit de etape dacă un cuvînt este o formulă şi dacă o suită de formule este o demonstraţie"[2]. Speranţele în rezolvarea tuturor problemelor care stăteau în faţa programului lui Hilbert s-au dovedit cu timpul iluzorii. Despre aceasta Fraenkel şi Bar-Hillel scriu: „Convingerea sa (a lui Hilbert. — *G. E.*) în rezolvabilitatea principială a tuturor problemelor matematice s-a dovedit nefundamentată cel puţin *dacă* înţelegem rezolvabilitatea ca rezolvabilitate în limitele unui sistem formal concret. Nu există, şi nici nu se prevede vreun procedeu unic şi general admis de reconstrucţie a matematicii, şi în acest sens criza fundamentelor matematicii se prelungeşte încă"[3]. Despre acest lucru vom avea posibilitatea să ne convingem atunci cînd vom trece în revistă un şir de teoreme limitative. După Hilbert au fost studiate diferite tipuri de sisteme formale în funcţie de modul în care acestea satisfac una sau alta din cerinţele puse. Nu ne vom ocupa de aceste sisteme, ci vom trece la o problemă mult mai importantă pentru noi, şi anume interpretarea sistemelor formale (SF).

c) *Interpretarea sistemelor formale**

Prin anexarea unor reguli semantice la un sistem SFP obţinem o interpretare a acestui sistem. Cu alte cuvinte, dacă dăm reguli de desemnare pentru variabilele sistemului (şi, respectiv, pentru „expresiile" compuse) şi reguli de adevăr pentru formule,

---

[1] Cit. după A. Fraenkel şi Y. Bar-Hillel. *Op. cit.*, p. 268.
[2] R. Martin. *Op. cit.*, p. 15.
[3] Ibidem, p. 269.
* Pentru interpretarea sistemelor formale date mai sus am folosit: F. C. Berkeley. *Symbolic Logic and Intelligent machines*, New York 1959; I. V. Arnold. *Teoreticeskaia ariftmetika*, Moscova, 1939.

sistemul devine un *sistem interpretat*. Domeniul de obiecte (şi relaţiile dintre aceste obiecte) la care se referă expresiile sistemului poartă numele de „univers al discursului", „structură" *(Bourbaki)*, „sistem de obiecte" *(Kleene)*, „sistem de relaţii" *(Tarski)*, „interpretare" *(Church)*, „model" *(Hasenjeger, Henkin* ş.a.). Noi vom numi un asemenea domeniu de obiecte cu unul dintre termeni: „univers al discursului", „sistem de obiecte", „sistem de relaţii" sau, pur şi simplu, domeniu de obiecte. Vom rezerva termenul de *interpretare* pentru procesul de stabilire a unei corelaţii între sistemul de obiecte şi sistemul formal prin intermediul regulilor semantice. Un sistem formal interpretat va fi numit limbaj teoretic. Dacă prin interpretare în sistemul de obiecte axiomele şi teoremele sistemului formal devin *propoziţii adevărate*, atunci vom spune că avem o *interpretare corectă*, iar sistemul de obiecte se va numi *model* al sistemului formal dat.

Dăm mai jos un şir de interpretări pentru cele două sisteme formale de mai sus (Boole, Peano). Ne vom mulţumi să indicăm ce desemnează expresiile (elementare şi compuse) ale sistemului, reţinînd că sistemele de obiecte indicate formează *modele* pentru aceste sisteme formale (condiţiile de adevăr nu ne interesează în mod deosebit aici).

Interpretări ale algebrei booleene:

A. Algebra booleeană poate fi interpretată în teoria demonstraţiei, considerată numai sub raportul adevărului:

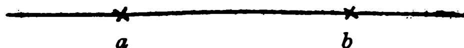
1) 1: adevărat;
   0: fals;
2) a, b, c, ...: premise (adevărate sau false);
3) $a.b$: conjuncţia premiselor („a şi b");
   $a \vee b$: disjuncţia premiselor („a sau b");
   $\neg a$: negaţia premisei a.

B. *Logica claselor*:

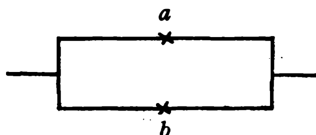
1) 1: universul, 0: clasa vidă;
2) a, b, c, ...: clase;
3) $a.b$: intersecţia a două clase;
   $a \vee b$: reuniunea a două clase;
   $\neg a$: clasa complementară lui a.

C. *Elemente bipoziționale ale schemelor electrice* (de exemplu contacte):

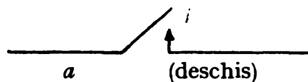
1) 1: închis;
   0: deschis;
2) a, b, c, ...: elemente (contacte);
3) $a \cdot b$: contacte în serie:



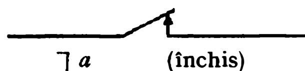
$a \vee b$: contacte în paralel:

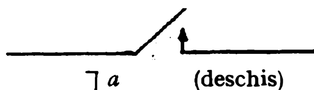


⌉ a: poziția contactului este opusă poziției lui a:





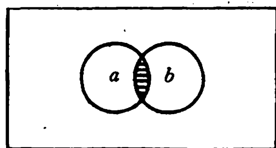




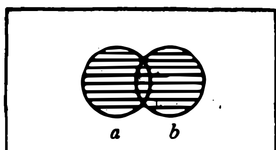
D. *Domenii pe o suprafață*:

1) 1: toată suprafața;
   0: nicăieri;
2) a, b, c, ...: domenii pe suprafață;

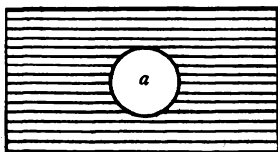
3) $a . b$: intersecția domeniilor:



$a \vee b$: reuniunea domeniilor:



$\neg a$: domeniul exterior lui a:



E. *Divizorii unor numere* (de exemplu ai lui 30):

1) 1: 30;

0: 1;

2) $a, b, c, \ldots$ oricare dintre numerele 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 (adică divizorii lui 30);

3) $a \cdot b$: cel mai mic multiplu comun al numerelor a, b;

$a \vee b$: cel mai mare divizor comun al numerelor a, b;

$\neg a$: 30 divizat la a.

F. *Zero și infinit*;

1) 1 : 0;

0 : ∞;

2) $a, b, c, \ldots$ mărimi din mulţimea $\{0, \infty\}$;

3) $a \cdot b$: înmulţirea lui a cu b;

$a \vee b$: adunarea lui a cu b;

$\neg a$: inversul lui a.

Interpretări ale sistemului lui Peano

A. (Şirul numerelor naturale):

1) 0: zero;
2) N: număr natural;
3) $'$: succesor.

B. 1) 0: orice număr constant a mai mare ca 1;
2) N: puterea numărului a al cărui exponent este o oarecare putere întreagă şi nenegativă a lui doi $(a^{2^0}, a^{2^1}, a^{2^2}, \ldots, a^{2^n}, \ldots)$;
3) $'$: egal pătratului;
C. 1) 0: segmentul dat AB;
2) N: segmentul AB şi părţile sale care se obţin prin divizarea sa la numărul părţilor sale care reprezintă puteri ale lui doi $\left(\frac{AB}{2^0}, \frac{AB}{2^1}, \frac{AB}{2^2}, \ldots, \frac{AB}{2^n}, \ldots\right)$;

3) $'$: egal jumătăţi.

D. 1) 0 : un individ uman X;
2) N:X şi orice înaintaş în genealogia sa pe linie bărbătească (fiu, tată, bunic, străbunic etc.);

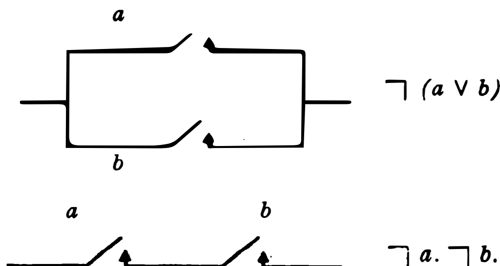
3) $'$: tată.

Să considerăm acum cîte o formulă demonstrată din cele două sisteme formale şi să vedem ce devine ea prin interpretare. Fie formula (teoremă) $\neg (a \vee b) = \neg a \cdot \neg b$. Ei îi vor corespunde următoarele teoreme generale în interpretare:

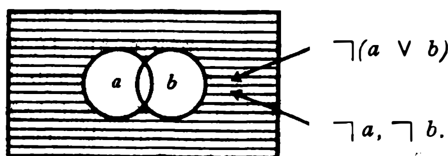
A. Dacă nu este adevărată disjuncţia premiselor a, b, atunci nici a şi nici b nu sînt adevărate (şi reciproca).

B. Clasa complementară reuniunii claselor a, b este aceeaşi cu intersecţia claselor complementare lui a şi respectiv lui b.

C. O schemă de contacte deschisă a, b dispuse paralel este echipolentă cu seria contactelor a, b deschise:



D. Mulţimea punctelor exterioare reuniunii lui a, b este echipolentă cu intersecţia dintre mulţimea punctelor exterioare lui a şi a punctelor exterioare lui b:



E. Convenim să socotim $d(a, b)$ o prescurtare pentru „c.m.m.d.c. de a, b", iar $m(a, b)$ o prescurtare pentru „c.m.m.m.c. de a, b". Propoziţia corespunzătoare formulei noastre va fi

$$\frac{30}{d(a, b)} = m\left(\frac{30}{a}, \frac{30}{b}\right).$$

F. Inversul sumei $a + b$ este egal cu produsul inverselor $\neg a \times \neg b$.

Iată şi propoziţii corespunzătoare unei formule din sistemul formal al lui Peano. Fie ax. 4: dacă $m \in N$ şi $n \in N$, atunci $m' = n'$ numai dacă $m = n$.

A. Dacă m este un număr natural (N) şi n este un număr natural (N), atunci $m + 1 = n + 1$ numai dacă $m = n$.

B. Dacă b face parte din mulţimea $(a^{2^0}, a^{2^1}, a^{2^2}, \ldots, a^{2^n}, \ldots)$ şi c face parte din aceeaşi mulţime, atunci $b^2 = c^2$ numai dacă $b = c$.

C. Dacă segmentul CD face parte din mulţimea $\left\{\frac{AB}{2^0}, \frac{AB}{2^1}, \frac{AB}{2^2}, \ldots, \frac{AB}{2^n}, \ldots\right\}$ şi EF face parte din aceeaşi mulţime, atunci $\frac{CD}{2} = \frac{EF}{2}$ numai dacă $CD = EF$.

D. Dacă Y face parte dintr-o linie genealogică (un fiu, tată, bunic, străbunic etc.) şi Z face parte din aceeaşi linie genealogică, atunci tatăl lui Y este identic cu tatăl lui Z numai dacă Y este identic cu Z.

Într-adevăr, să presupunem că Y = bunicul; Z = străbunicul; atunci tatăl lui Y nu poate fi identic cu tatăl lui Z, căci ar însemna că bunicul şi străbunicul au acelaşi tată, ceea ce este absurd.

Interpretările date mai sus sînt ele însele generale, cu alte cuvinte nu sînt propoziţii empirice ale ştiinţei date. Desigur, aceste propoziţii generale pot fi uşor exemplificate.

Întrebarea este alta: în virtutea cărui fapt sistemul formal admite interpretări atît de diferite? Se spune de obicei că sistemele de obiecte care satisfac un sistem formal sînt *izomorfe*, însă ne întrebăm: putem noi rămîne la simple raporturi de izomorfism (de corespondenţă biunivocă)? Nu cumva există o descriere mai generală care convine tuturor sistemelor de obiecte luate ca model? Nu cumva acestea sînt doar „cazuri particulare" a ceva extrem de general?

Kleene defineşte „sistemul de obiecte" în mod foarte general: „prin sistem de obiecte S vom avea în vedere o mulţime (nevidă), clasă sau domeniu D (sau poate cîteva astfel de mulţimi) de obiecte între care sînt stabilite unele corelaţii"[1]. Ca exemplu de sistem el dă şirul natural care formează un *sistem de tipul* $(D, 0, ')$, unde D este o mulţime, 0 element al mulţimii D,

[1] S. C. Kleene. *Op. cit.*, p. 29.

iar ′ o operaţie uninară asupra elementelor mulţimii D. Despre un sistem dat, fie el *şirul natural*, el scrie: „Dacă despre obiectele sistemului noi nu ştim nimic în afară de *corelaţiile care au loc între ele în sisteme* (subl. ns. — *G. E.)*, atunci sistemul se numeşte *abstract*. În acest caz se stabileşte numai structura sistemului, iar natura obiectelor ei rămîne nedeterminată sub toate raporturile, cu excepţia unuia: că ele sînt în acord cu această structură"[1]. Cu privire la mulţimea $\{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, sistemul lui Peano (*aşa cum l-a dat Peano*, neformalizat) nu exprimă decît corelaţiile dintre elementele ei, fără a spune ce sînt aceste numere, de exemplu, în raport cu lumea fizică. Faptul că aceste elemente nu sînt de loc obiecte de sine stătătoare, ci doar determinări cantitative ale unor mulţimi (fizice să zicem), nu rezultă deloc din sistemul descris de axiomele lui Peano. Ele sînt nişte obiecte abstracte care satisfac structura descrisă de această axiomatică şi nimic mai mult. „Orice altă specificare a naturii obiectelor constituie *reprezentarea* (sau *modelul*) acestui sistem abstract, adică sistemul de obiecte care satisface corelaţiile sistemului abstract, şi în afară de aceasta avînd, în general vorbind, şi alte însuşiri"[2]. Ca reprezentări ale *şirului natural* (sistem abstract), Kleene dă 1) numerele naturale ca puteri (determinări) ale mulţimilor finite, 2) numerele pozitive întregi (unde 1 reprezintă obiectul abstract 0), 3) numerele naturale pare (+2 reprezintă operaţia ′), 4) uneori mărfurile sînt puse în cutii, iar pe cutii se pune o etichetă pe care este desemnată însăşi cutia. Precizia fizică a acestui enunţ este limitată, dar dacă noi ne imaginăm exactitatea ideală a desenului, atunci putem reprezenta 0 prin însăşi cutia, 1 prin desenul cutiei pus pe cutie, 2 prin desenul cutiei făcut în desenul cutiei pus pe cutie ş.a.m.d. Kleene distinge astfel două nivele de abstracţie: sistemul de obiecte abstracte care satisface axiomele lui Peano şi sistemele de nivel inferior care pot să reprezinte pe primul. Ce loc ocupă

---

[1] Ibidem, p. 30

[2] Ibidem, p. 25.

sistemul formal corespunzător axiomaticii lui Peano? *Prin definiție am văzut că acesta nu se mai referă la nici o abstracție (este eliminarea oricărei abstracții), el însuşi fiind rezultatul celei mai radicale abstractizări*. Cînd se pune problema însă să interpretăm acest sistem, este firesc ca noi să revenim în primul rînd la cea mai abstractă interpretare posibilă; această interpretare este *un sistem de obiecte* despre a căror natură nu ştim nimic în afară de faptul că se află în anumite corelații, că satisfac o anumită *structură**. Considerînd sistemul formal al lui Peano, o asemenea structură poate fi descrisă astfel: a) o mulțime de obiecte care constă dintr-un obiect inițial şi din alte obiecte dispuse astfel că urmează imediat unul după altul; b) obiectele satisfac anumite relații generale (de exemplu nici unul nu are după el decît un singur obiect care urmează imediat ş.a.). Despre aceste obiecte nu ştim nici că sînt numere naturale, nici că sînt oameni aflați într-o linie genealogică şi nimic altceva decît s-a specificat mai sus. Sistemul de obiecte descris în această formă generală este ceea ce vom numi *structură* sau *interpretare generală* a sistemului formal. Se poate deci spune că sistemul formal are o interpretare unică (privilegiată), de cel mai înalt nivel de abstracție — structura, sistemul general de un tip dat, reprezentarea (modelul) general —, *în raport cu care alte interpretări sînt doar cazuri particulare*. Un sistem formal admite numai o singură structură şi, în genere, este adecvat pentru o singură structură determinată. Dacă am presupune că fiecare ştiință poate fi formalizată (cel puțin parțial), atunci s-ar putea spune că fiecare ştiință studiază o *anumită structură*, matematicii revenindu-i să studieze „structuri cantitative" (interpretabile, la rîndul lor, pe mulțimi de numere sau pe forme

---

* La această noțiune de structură se referă şi Bourbaki în studiul *Arhitectura matematicii*. Noțiunea de struct ră (ei vorbesc chiar de „structură matematică") este caracterizată prin următoarele:

a) se referă la o mulțime de elemente a căror natură „nu este definită";

b) structura se defineşte „printr-una sau mai multe relații în care se află elementele ei";

c) „se postulează apoi că relația dată sau relațiile date satisfac unele propoziții (pe care le enumerăm şi care sînt *axiomele* structurii considerate)" (vezi *op. cit.*, p. 251).

spaţiale pure)*. Este posibil ca între structuri să existe suprapuneri, în nici un ca ele însă n-ar fi reductibile una la alta, ceea ce de altfel istor a ştiinţei a arătat cu prisosinţă.

Posibilitatea însă de a studia structurile cu ajutorul sistemelor formale arată valoarea deosebită a acestor sisteme. Valoarea excepţională a acestor sisteme constă în aceea că noi putem rezolva probleme ale cunoaşterii dintr-o dată pentru un număr nelimitat de domenii concrete, ceea ce, evident, niciun sistem neformal nu poate obţine. Este de ajuns să stabilim corespondenţa între elementele sistemului formal şi elementele unui domeniu dat, precum şi corespondenţa obiectelor compuse ale sistemului formal cu raporturile aceluiaşi domeniu, pentru a şti că în acest domeniu se pun şi se rezolvă aceleaşi probleme ca în orice altă interpretare (cunoscută) a acestui sistem. Pe de altă parte, sistemele formale, cuprinzînd operaţii materiale intuibile, ne asigură o precizie mult mai mare decît gîndirea abstractă.

Din punct de vedere filozofic materialist, formalizarea constituie indiscutabil un nou argument. Prin formalizare gîndirea revine la suportul ei material, în aşa fel că substituie operării cu abstracţii o operare cu obiecte materiale. Formalizarea reprezintă totodată o nouă verigă de legătură a gîndirii cu

---

* Unii matematicieni contemporani vor să elimine total obiectul („substanţa") din consideraţiile lor, operînd exclusiv cu structuri (cu sisteme de relaţii). În acest f l, obiectul este o simplă funcţie de relaţii. S-ar putea spune că în matematica de astăzi se înfruntă trei tendinţe: „substanţialistă" (clasic), „ tructuralistă" şi „constructivistă". Eu cred că eşecul încercărilor de a înlocui „obiectul" cu „structura" şi pe aceasta din urmă cu „construcţiile intelectuale" este deja un fapt. Anumite dificultăţi (de exemplu paradoxele) nu pot căpăta o soluţie fără admiterea unor supoziţii referitoare la obiect. Poziţia care rezultă din evoluţia matematicii şi logicii este următoarea: trebuie să admitem unitatea dintre obiect şi structură, pe de o parte, iar pe de altă parte construcţia intelectuală să fie văzută doar ca o „reproducere" a unor sisteme de raporturi aflate între obiecte reale (existente în afară şi independent de construcţiile intelectuale). Pe de altă parte trebuie spus că sursa anumitor concepţii care s-au înfruntat în filozofia matematicii îşi are originea în exagerarea rolului unuia sau altuia dintre procedeele de lucru în dauna celorlalte. În momentul de faţă se conturează în mod spontan adevărata concepţie despre aceste procedee: toate procedeele sînt bune în anumite limite, limite despre care ştim că există dar care nu pot fi determinate înaintea oricărei experimentări. Rezultă o colaborare a metodelor logice, formalistice, constructive şi semantice. Fiecare dintre aceste metode este destinată să rezolve un anumit tip de probleme, dar nu toate problemele.

practica; acest nou tip de legătură poate fi numit „legătură formală". Într-adevăr, în mod obişnuit noi facem legătura cu realitatea prin faptul că „aplicăm" în practică ideile noastre. Ne folosim, cu alte cuvinte, de conţinutul ideilor noastre. Secolul al XX-lea a descoperit şi altă posibilitate: putem reproduce însuşi mecanismul material care stă la baza gîndirii. Această reproducere poartă numele de „modelare a gîndirii".

Valoarea deosebită a sistemelor formale şi dorinţa de a scăpa o dată pentru totdeauna de contradicţii (dorinţă zadarnică) au făcut ca rolul lor să fie mult exagerat. Punctul de vedere metodologic a degenerat şi de astă dată în punct de vedere filozofic fundamental. În ce-l priveşte pe Hilbert, întemeietorul „formalismului matematic", el a oscilat tot timpul între un punct de vedere metodologic şi unul filozofic. El a fost uneori înclinat să facă din sistemul de semne singurul obiect al matematicii. El spunea: Am Anfang ist das Zeichen... Diese Zeichen haben keinerlei Bedeutung". Şi socoteşte această afirmaţie drept punctul său de vedere filozofic: „Pentru mine, şi în aceasta eu mă deosebesc total de Frege şi Dedekind, obiectele teoriei numerelor sînt înseşi semnele, a căror formă o putem recunoaşte în toată generalitatea ei şi fără vreun pericol, independent de condiţiile de spaţiu şi timp şi de toate condiţiile particulare în care ele apar... Punctul de vedere filozofic pe care noi îl socotim necesar pentru fundamentarea matematicii pure, precum şi pentru orice gîndire ştiinţifică, pentru orice înţelegere şi comunicare, se reduce la aceasta: la început — astfel mă exprim aici — este semnul"[1]. Punctul de vedere formalist filozofic este declarat şi susţinut cu toată sinceritatea de către H.B. Curry, care afirmă că *matematica este pur şi simplu ştiinţa despre sistemele formale*.

Punctul de vedere formalist este descris clar de către S.C. Kleene: „Aceasta înseamnă pur şi simplu că simbolurile şi altele asemenea sînt ele înseşi obiectul ultim al matematicii şi nu trebuie să fie folosite pentru desemnarea a ceva deosebit de ele. Matematicianul priveşte la ele, nu prin ele şi nu la altceva ce se

---

[1] D. Hilbert. *Axiomatische Denken*, în „Mathematisches Annalen", Bd. 78, 1918, p. 405.

află dincolo de ele; în acest fel, ele sînt obiecte fără interpretare sau semnificație"[1]. Greșeala pe care o fac formaliștii în definiția matematicii constă, după părerea mea, în aceea că ei încearcă să substituie definiția matematicii „prin obiectul ei" cu definiția „prin metodă". A înlocui definiția ontologică cu definiția metodologică înseamnă, în fond, a strecura în filozofia matematicii un punct de vedere pragmatist (se înțelege, foarte rafinat). *Se uită că o știință se delimitează de altele prin domeniul ei de obiecte și nu prin procedeele ei.* Pe de altă parte, avînd în vedere că sistemul formal ține de forma științei (este forma materială constituită o dată cu reflectarea), noi nu putem defini știința doar prin sistemul formal, ci trebuie s-o definim prin conținutul (să ne raportăm la domeniul ei de obiecte). Erorile formalismului pot fi grupate astfel: a) definirea științei prin formă și nu prin conținut; b) înlocuirea definiției existențiale („prin obiect") cu definiția metodologică („prin metodă"). Formalismul, ca orice idealism, întoarce lucrurile cu capul în jos: *el nu pornește de la prim, ci de la derivat*; *nu de la obiect, ci de la modul de abordare a obiectului.*

Nu puțini sînt matematicienii care uită că sistemele formale sînt „formalizări" ale unor teorii preexistente și că deci nu poate fi vorba de construcții arbitrare cărora li se caută apoi o interpretare. S. Körner, care a criticat pe bună dreptate această latură slabă a formalismului, compară sistemele formale cu harta: *nu există harta dacă nu există teritoriul*, comparație care mi se pare cu totul întemeiată. În mod magistral a caracterizat G. Boole formalismele logice-matematice în lucrarea sa *Cercetări asupra legilor gîndirii...* (1854). El stabilea următoarele principii:

1) simbolurile au o interpretare și legile de combinare a lor sînt corect determinate din interpretare;

2) procesul de rezolvare (demonstrare) este efectuat conform cu legile determinate mai înainte și fără a ține seama de interpretare;

3) rezultatul final să fie interpretabil în conformitate cu sistemul de interpretare dat la început.

---

[1] S. C. Kleene. *Op. cit.*, p. 50.

În acest fel, G. Boole stabilește caracterul derivat (dependent de interpretare) al sistemului formal. Sistemul formal nu este punct absolut de plecare pentru știință, ci un punct de sosire (= rezultatul celei mai radicale abstractizări). Legile sistemului formal (regulile) nu sînt arbitrare, ci scoase „din interpretare" *(Boole)*. Tocmai de aceea sistemul formal trebuie să conserve proprietatea *interpretabilității în domeniul de obiecte inițial*. O formulă care nu-și găsește interpretare în domeniul de obiecte este dovada cea mai bună a lipsei de consistență a sistemului și deci a caracterului său arbitrar. *Orice transformare a sistemului trebuie să fie interpretabilă*, iată o lege de bază a sistemului formal, lege despre care ne vorbește G. Boole. Istoria cunoașterii dovedește că orice sistem formal este a) sau formalizarea unei teorii intuitive, b) sau o dezvoltare după regulile logicii (prin generalizare și determinare) a unui sistem dat, obținut pe baza unei interpretări. Nici un fapt nu ne dă posibilitatea ideii de „arbitrar" în construcția formalismelor științei.

Dacă un sistem S *abstract este considerat ca model general al unui sistem formal* SF, *o dată ce am construit sistemul* SF *și am descris modelul său* S *putem considera tot atît de bine că sistemul formal* SF *este un model (artificial construit) al sistemului* S. Cu alte cuvinte, gîndirea studiază diferite sisteme de obiecte mai concrete sau mai abstracte cu ajutorul unor sisteme materiale *(SF)* construite special pentru aceasta. Ea nu construiește arbitrar aceste sisteme de obiecte materiale (desene și serii de desene), ci în corespondență cu anumite sisteme date (abstracte sau concrete) într-o teorie sau alta. Roger Martin scrie că „recursul la simboluri nu caracterizează formalismul *(SF.—Gh.E.)* decît în măsura în care el este însoțit de un progres în abstracție"[1]. Originea *SF* în teoriile intuitive este indiscutabilă: „Într-un mod general, formalizarea pleacă astfel de la un dat constituit de o teorie neformală, dat căruia căutăm să-i exprimăm proprietățile structurale în mod simbolic. Cînd se formalizează, de exemplu, matematica, punctul de plecare este o matematică deductivă, dar îmbibată de referiri la intuiție"[2]. Dar nu numai

---

[1] Roger Martin, *op. cit.*, p. 8.
[2] Ibidem, p. 7.

punctul lor de plecare este într-o teorie intuitivă, ci și punctul de sosire trebuie să fie aici. „Constituirea unui sistem formal pornind de la o teorie naivă ar fi un simplu joc dacă nu s-ar putea arăta că sistemul formal admite una sau mai multe interpretări naive și dacă nu s-ar spera să se facă din el un instrument care să ne permită să atingem rezultatele inaccesibile (sau dificil accesibile) cu metode naive"[1]. Cînd vorbim de faptul că sistemele formale își au originea în teorii naive, scrie R. Martin, nu trebuie să înțelegem prin „naiv" ceva peiorativ, căci „teoriile matematice care se formalizează sînt adesea foarte abstracte (teoria generală a grupurilor, teoria mulțimilor)"[2].

Legătura dintre un sistem formal *(SF)* și teoriile intuitive se exprimă la nivel lingvistic prin existența unor concepte paralele „sintactice" și „semantice". Astfel, proprietățile de noncontradicție, independență și completitudine care trebuie să caracterizeze conceptul de „demonstrabilitate" sînt formulate atît prin raport cu sistemul formal („sintactic"), cît și prin raport cu modelul său („semantic"). În ultima instanță însă, noțiunile *sintactice* sînt introduse și justificate pe baza noțiunilor *semantice*. Iluziile pe care le împărtășea Hilbert și colaboratorii săi în legătură cu valoarea și cu sensul filozofic al formalizării au fost risipite de apariția unor teoreme limitative. S-a crezut, de exemplu, că sistemele formale *SF*, dispensîndu-se de semantică, se eliberează prin aceasta și de antinomiile semantice*. La aceasta apare întrebarea: „Nu se poate întîmpla să mai găsim un procedeu care să ne permită să dezvoltăm și descriem în aceste sisteme propria lor sintaxă și semantică? Și nu apar atunci din nou antinomiile semantice?"[3] Că o asemenea situație poate avea loc s-a arătat cu toată claritatea de către Gödel prin demonstrarea vestitei sale teoreme despre incompletitudinea de principiu a sistemelor de tipul *Principia Mathematica*. Vom expune

---

[1] Ibidem, p. 7.
[2] Ibidem.
[3] A. A. Fraenkel și Bar-Hillel. *Foundation of Set Theory*, North-Holland Publ. Comp., 1958, p. 250.

* Rudolf Carnap scria greșit că „propozițiile limbajului material dau iluzia raportului cu un obiect, în timp ce acest raport nu se prezintă de loc. De aici anumite confuzii, pseudoprobleme și chiar contradicții. De aceea e prudent să le evităm pe cît posibil sau cel puțin în punctele delicate; vor fi preferate propoziții formale, ceea ce va duce la eliminarea anumitor pseudoprobleme" *(Le problème logique de la science*, Paris, 1935, p. 20).

în linii mari această teoremă. Considerăm sistemele de tipul *Principia Mathematica*. Aceste sisteme conţin o parte logică şi o parte aritmetică (aritmetica şirului natural de exemplu). Aritmetica respectivă este construită după procedee recursive (recurente). Datorită posibilităţii de enumerare într-un anumit fel a expresiilor sistemului, partea logică poate fi tradusă în aritmetică. Mai mult, orice propoziţie metateoretică asupra sistemului poate fi reprezentată în aritmetica sa. Această posibilitate ne dezvăluie ceea ce se numeşte „caracterul închis" al sistemului. Gödel stabileşte reguli de numerotare a simbolurilor formulelor şi seriei de formule din sistem. De exemplu, dacă sistemul conţine simbolurile 0 (zero), S (succesor), $=$ (egal), & (şi), $\vee$ (sau), $\neg$ (negaţie), $\rightarrow$ (implicaţie), $\forall$ (cuantor universal), $\exists$ (cuantor existenţial), $+$ (plus), $\cdot$ (înmulţit), ((paranteză stîngă) şi) (paranteză dreaptă), ele vor fi numerotate, respectiv, cu numerele impare de la 3 la 27. Printre propoziţiile metateoretice care pot fi „aritmetizate" există una care afirmă că sistemul este necontradictoriu.

În forma sa iniţială, teorema lui Gödel nu se referă la conceptul de noncontradicţie, ci la unul mai puternic *ω-necontradicţie*. Conceptul de ω-necontradicţie implică necontradicţia simplă. Un sistem formal se numeşte *ω-necontradictoriu* dacă nu există o variabilă x şi o formulă $A(x)$ astfel ca toate propoziţiile următoare să fie demonstrate: $A(0), A(1), A(2), \ldots, \neg \forall x A(x)$.

I. *Teorema lui Gödel* (forma iniţială). Dacă sistemul de tipul *Pr. Math.* este ω-necontradictoriu, atunci este incomplet (cu alte cuvinte există o formulă care nu poate fi nici demonstrată şi nici respinsă în acest sistem)*.

Rosser a dat următoarea generalizare acestei teoreme:

II. *Teorema lui Gödel* (în forma lui Rosser). Dacă sistemul de tipul *Pr. Math.* este necontradictoriu, atunci el este incomplet.

III. *Teorema lui Gödel* (a doua). Dacă sistemul de tipul *Pr. Math.* este necontradictoriu, atunci nu se poate demonstra acest lucru cu mijloacele de care dispune sistemul.

---

* Pentru teoremele citate vezi Kleene, op. cit., şi Fraenkel şi Bar-Hillel, op. cit.

În general, rezultatele lui Gödel pot fi rezumate astfel. Există o asemenea formulă care poate fi construită în sistemul de tipul *Pr. Math.* și care este adevărată, dar nu poate fi demonstrată cu mijloacele acestui sistem. O asemenea formulă este aceea care afirmă că sistemul considerat este necontradictoriu. Ea poate fi demonstrată cu mijloace din afara sistemului considerat (de exemplu inducția transfinită). Presupunerea că ea ar fi demonstrabilă în sistem duce la contradicții. Deoarece ea este adevărată și nu poate fi demonstrată în sistem, sistemul este incomplet. În concluzie, nici un sistem de tipul *Pr. Math.* nu poate fi în același timp necontradictoriu și complet, deoarece nici o formulă care exprimă noncontradicția sistemului nu poate fi demonstrată în sistem. La rîndul său, Tarski a demonstrat o altă teoremă care limitează puterea sistemelor formalizate.

IV. *Teorema lui Tarski.* Noțiunea de adevăr al sistemului formalizat necontradictoriu nu poate fi definită în acest sistem.

Alte limitări ale sistemelor formale sînt date de următoarele teoreme:

V. *Teorema lui Church.* Calculul predicatelor de ordinul întîi nu se bucură de proprietatea rezolvabilității (cu alte cuvinte nu posedă un procedeu general de decizie).

VI. *Teorema lui Church-Rosser.* Aritmetica elementară nu se bucură de proprietatea rezolvabilității.

Din teoremele de mai sus rezultă clar că nu întreaga aritmetică poate fi formalizată și cu atît mai puțin întreaga matematică. „Noi n-am reușit să formalizăm aritmetica intuitivă într-un mod complet și clar, astfel ca fiecare propoziție sau negația ei să fie consecință pe baza unor reguli explicit formulate din axiome explicit formulate"[1]. Teoremele de mai sus arată că nu întregul proces de gîndire poate fi supus formalizării, că ea nu se poate constitui ca un sistem absolut închis suficient pentru orice explicație și demonstrație; cu alte cuvinte, gîndirea și cunoașterea sînt procese permanent deschise. Nici o formă nu este capabilă să cuprindă în ea întregul conținut pe care-l putem cunoaște. Teoremele de mai sus exprimă „limitele interne ale

---

[1] S.C. Kleene. *Op. cit.*, p. 211.

formalismului" (J. Ladrière); ele silesc formalismul din interior (cu propriile sale mijloace) să se depăşească. Formalizarea este un procedeu cu valoare limitată ca orice alt procedeu al cunoaşterii. Este un procedeu suficient de puternic pentru a ne furniza noi rezultate relative şi prea slab pentru a permite gîndirii să obţină rezultate absolute. Problema formalizării nu poate fi încheiată fără a spune cîteva cuvinte despre posibilităţile pe care le deschide modelării proceselor intelectuale.

Calea spre modelarea gîndirii trece prin formalizare. Deşi problema modelării gîndirii a apărut la ordinea de zi mai tîrziu decît problema formalizării, ne vom opri puţin asupra ei. Modelul este un sistem de obiecte (materiale sau abstracte) pus în corespondenţă determinată cu alt sistem dat anterior. Astfel modele sînt toate interpretările sistemului formal boolean („algebra booleană"). Logica bivalentă a propoziţiilor este un model al sistemului boolean. Aşa după cum s-a mai arătat, un sistem formal nu este o *logică*, logica este ea însăşi interpretare a sistemului formal. Dacă noi numim totuşi uneori formalismele logice „logică", o facem avînd în vedere materialul concret de pe care a fost abstractizat acest sistem. În legătură cu modelarea s-a pus în ultima vreme următoarea întrebare: *există oare posibilitatea modelării cu ajutorul proceselor materiale a tuturor proceselor intelectuale şi chiar psihice?* Fără a intra în amănunte, vom spune că ceea ce se poate afirma în momentul de faţă cu temei sînt următoarele: a) practic s-a dovedit că unele operaţii intelectuale (deducţia de exemplu) pot fi modelate prin mecanisme materiale, b) practic şi teoretic se poate susţine că cel puţin procesele intelectuale care pot fi formalizate pot fi modelate material, c) filozofic problema modelării proceselor psihice pe cale materială rămîne deschisă, ca în general problema reproducerii oricărui proces existent în univers. Din cele afirmate aici ar părea să rezulte că formalizarea constituie condiţia *sine qua non* a oricărei modelări a proceselor subiective. *Dacă lucrurile stau într-adevăr astfel, atunci orice limite ale formalizării vor fi şi limite ale modelării.* Unde se află aceste limite? *Dialectica presupune că orice proces din univers (inclusiv cele umane) poate*

fi reprodus. Singura limită pe care ea o pune este aceea de a nu afirma epuizarea reproducerii acum şi aici.

În concluzie, trebuie să spunem că formalizarea și modelarea proceselor intelectuale a devenit în prezent nu numai o posibilitate ci chiar o necesitate. Se știe ce rol joacă în momentul de față introducerea pe scară largă în economia națională a calculatoarelor electronice și a automatizării. Ori construirea și utilizarea calculatoarelor electronice este de neconceput fără folosirea aparatului formal al logicii matematice, iar automatizarea presupune operația fundamentală de programare, care, de asemenea, nu poate fi efectuată fără o analiză logic-formală şi fără modelarea anumitor procese în care omul ocupă un loc central. Tocmai de aceea răspîndirea metodelor logico-matematice este nu numai o necesitate teoretică, ci și una practică. Cunoașterea acestor metode ridică pe o treaptă superioară activitatea specialiștilor din domeniul tehnicii, iar pe de altă parte apropie pe teoretician de cele mai actuale probleme ale tehnicii moderne, așa încît preocupările de producție pătrund în cele mai înalte sfere ale cercetărilor teoretice fundamentale.

ÎN LOC DE CONCLUZII

În raporturile care se stabilesc între obiect și reflectarea sa, între obiect și „expresia" sa, se înfruntă în permanență două tendințe: una spre reglare și autoreglare a acestor raporturi în conformitate cu legile adevărului și ale practicii, alta spre dereglare, spre conflict și instabilitate. În eforturile sale de a cunoaște realitatea, de a „reproduce" *(Marx)* obiectul, se nasc tot felul de dificultăți, de contradicții, de antinomii, pe care omul, învingîndu-le, își dezvoltă și corectează în permanență imaginea sa asupra obiectului. La originea tuturor acestor dificultăți, contradicții, antinomii se poate spune că stă „dereglarea", sub impulsul diferiților factori, a raporturilor fundamentale dintre obiect și imaginea sa, dintre obiect și expresia sa subiectivă. Toate conflictele din cunoaștere exprimă în ultimă instanță această „dereglare fundamentală" și lupta pentru normalizarea, adecvarea și readecvarea expresiei la obiect. A uita acest adevăr de bază înseamnă a perpetua conflictul, contradicțiile, antinomiile care apar la un moment dat în cunoaștere; dimpotrivă, a ni-l reaminti înseamnă a merge mai direct și mai simplu spre soluția care ne duce la eliminarea lor. Progresul cunoașterii este o luptă continuă cu factorii care perturbă relațiile fundamentale dintre obiect și expresia sa. Istoria matematicii, a logicii, a fizicii și a altor științe este edificatoare din acest punct de vedere. Eforturile de soluționare a antinomiilor (paradoxelor) logico-matematice au dus la o dezvoltare fără precedent a teoriilor științifice corespunzătoare. Toate soluțiile care s-au dat antinomiilor logico-matematice, fie că este vorba de teoria tipurilor a lui Bertrand Russell, de concepția despre infinit a lui Brouwer, de nivelele limbajului la Carnap și Tarski sau de nivelele logicului, ca la D.A. Bocivar, toate acestea nu sînt decît reveniri la raporturile de bază din-

tre obiect și expresia sa. Antinomiile au demonstrat „prin absurd" că este necesar să reconstruim teoria, știința prin readecvare la obiect, prin restabilirea unității și diferenței dintre obiect și imaginea sa. Teoria tipurilor a lui Russell ne-a arătat că antinomiile logico-matematice nu înseamnă altceva decît o distrugere a „opoziției relative" *(Engels)* dintre obiect și expresia sa, o reducere la ecuația

obiect = expresia sa.

Brouwer, la rîndul său, ne-a arătat că sub alte laturi se produce o deplasare a imaginii obiectului dincolo de limitele sale de aplicație, astfel că la nivelul reflectării

finit = infinit.

Tarski dezvăluie încălcarea raporturilor dintre semnificație și expresia lingvistică, astfel că

semnificație = nume.

Bocivar găsește că identificarea vizează raportul dintre abstract („pur") și concret („aplicativ"):

logică pură = logică aplicată.

Hilbert îl învinuia pe Zenon de confuzie între mișcarea fizică și gîndirea matematică a acestei mișcări, cu alte cuvinte

mișcarea obiectului = gîndirea mișcării.

Deși toate explicațiile s-au întîlnit în ideea comună că antinomiile înseamnă în ultimă instanță o perturbare a raporturilor fundamentale dintre obiect și imaginea sa subiectivă, majoritatea autorilor n-au tras concluzii pe această linie, ci s-au străduit să reconstruiască totul, ignorînd propriile lor explicații. Rezultatul este, așa cum scrie marele matematician american S.C. Kleene, că nici pînă astăzi nu s-a ajuns la o soluție unanim acceptată. Bertrand Russell, Rudolf Carnap și Alfred Tarski deplasează atenția spre expresia lingvistică a obiectului, degenerînd adesea într-un soi de nominalism extremist și creînd impresia că mai degrabă obiectul este pus în dependență de construcțiile lingvistice decît construcțiile lingvistice de obiect. Toate acestea și-au spus cuvîntul asupra metodelor propuse de acești autori în soluționarea dificultăților. Tratînd problema raportului dintre logică și matematică, Bertrand Russell o re-

duce pur și simplu la raportul dintre propozițiile logicii și propozițiile matematicii, uitînd de acel conținut care ne-a determinat să le numim pe unele „logice", iar pe altele „matematice". Alfred Tarski substituie ideea raporturilor fundamentale dintre obiect și expresia sa lingvistică deosebirii dintre limbajul-obiect și metalimbaj, ca și cum ierarhia expresiilor limbii n-ar exprima ierarhia raporturilor reale (independente de limbă). Brouwer și uneori Hilbert au propus soluționarea problemei raporturilor dintre obiect și imaginea sa subiectivă prin eliminarea ei definitivă din cîmpul cunoașterii. Pentru Brouwer, obiectul matematicii este rezultatul activității constructive a gîndirii matematicianului. Contradicțiile apar între propoziții, scria Hilbert, nu și între obiecte; prin urmare, dacă am înlocui operarea cu propoziții prin operarea cu obiecte, am scăpa definitiv de problema contradicțiilor (în speță a antinomiilor). Obiectele noastre ar fi niște obiecte convențional perceptibile și ușor de mînuit, de exemplu desenele pe hîrtie. Este o iluzie să căutăm consecvență în aceste concepții, căci consecvența este exclusă prin definiție din orice concepție extremistă.

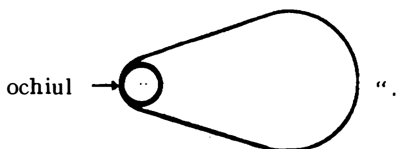
Ideile de mai sus au fost urmărite în detaliu în această carte, pe care am intitulat-o *Logică și adevăr* și care are ca unic scop demonstrarea necesității de revenire la adevăratul statut al obiectului cunoașterii, la postulatele raporturilor dintre obiect și imaginea sa subiectivă. Am arătat că toate eșecurile și dificultățile în care se zbat concepțiile logiciste, formaliste, intuiționiste și semantice provin din ignorarea flagrantă a acestor postulate.

Contradicția atinge punctul maxim atunci cînd față-n față stă subiectul, reflectarea și obiectul general al reflectării, materia. Problema pusă de Wittgenstein (și de alți idealiști): *omul nu-și poate ieși din sine pentru a se percepe pe sine de o parte și materia de alta*, este o pseudoproblemă.

„*Unde* în lume se poatea vedea subiectul metafizic?

Vorbiți că aici lucrurile stau la fel ca și cu ochiul și cîmpul vederii. Dar în realitate voi nu vedeți ochiul. Și din nimic în

cîmpul vederii nu se poate conchide că se vede ochiul. Căci cîmpul de vedere nu are această formă:



"...

„... Lumea este lumea mea" *(Tractatus*, aforismele 5.633, 5. 6331, 5.641).

Ba nu, ochiul meu se vede pe sine. Se vede pe sine în oglindă. Oglinda mea sînt semenii mei.

Postulatele mele privitoare la raporturile dintre obiect și reflectarea sa se verifică, se verifică indirect, așa cum axiomele se verifică prin consecințele sale: din ele nu decurge o contradicție și ele îmi explică (din ele se deduce!) tot adevărul aflat în sfera lor de aplicație, ele îmi permit să acționez și deci să exist:

a) N-a dovedit oare istoria cunoașterii că încălcarea postulatelor privitoare la „independența", „primatul" și „ordinea" obiectului duce la antinomii?

b) N-am reintrodus pe ușa din dos adesea desfigurate aceste postulate pentru a putea scăpa știința de anomalii?

c) Existența fiecăruia nu confirmă îndeajuns adevărul lor?

d) Nu? Încercați pentru o clipă să vă comportați ca și cum acestea n-ar fi adevărate. Atunci eu = lumea mea = granița lumii vă va apărea o ecuație absurdă. Iată deci răspunsul la problema lui Wittgenstein: omul n-are nevoie să-și iasă din sine pentru a constata raporturile sale cu lumea. Wittgenstein cere argumente absurde pentru a face concluziile absurde, însă absurditatea argumentelor nu arată decît... absurditatea argumentelor.

Am căutat să prezentăm acea dialectică a dezvoltării științelor contemporane care își are pivotul în conflictul dramatic dintre obiect și imaginea sa subiectivă, în general vorbind dintre existență și conștiință, o conștiință care tinde, sub impulsul anumitor factori, să transforme independența sa relativă față de realitate în independență absolută. Însă ignorarea „adversarului" nu înseamnă, cum se spune, nimicirea lui, ci un nou prilej de a cădea în cursa lui.

ANEXĂ

Logica matematică

Logica matematică studiază legile gîndirii corecte cu ajutorul metodelor deductive şi al formalizării (procedee de calcul, procedee axiomatic-formale). Datorită faptului că ea are ca punct de plecare conceptul de funcţie logică, logica matematică mai poate fi definită *ca teorie a funcţiilor logice.*

Logica matematică are următoarele capitole importante: 1) teoria funcţiilor de adevăr (logica propoziţiilor, calculul propoziţiilor), 2) teoria funcţiilor predicative (logica predicatelor, calculul predicatelor), 3) teoria funcţiilor extensionale (logica claselor, calculul claselor), 4) teoria funcţiilor relaţionale (logica relaţiilor, calculul relaţiilor), 5) teoria combinatorilor logici (logica combinatorică). Aceste serii de teorii logice sînt, la rîndul lor, studiate într-o metalogică (teoria sistemelor logice)*.

I. TEORIA FUNCŢIILOR DE ADEVĂR

Teoria funcţiilor de adevăr studiază procesul demonstraţiei din punctul de vedere al raporturilor de valoare (adevăr, fals ş.a.). În acest scop ea se foloseşte de un limbaj simbolic adecvat.

Să presupunem că avem mulţimea propoziţiilor astfel că fiecare dintre aceste propoziţii este sau adevărată, sau falsă (a treia posibilitate fiind exclusă).

Propoziţia „$2+2=4$" este adevărată, iar propoziţia „$2+3=4$" este falsă. Faptul că o propoziţie este adevărată va fi notat cu v, iar faptul că o propoziţie este falsă va fi notat cu f. Între propoziţii, unele sînt elementare (nici o parte a lor nu mai este propoziţie), altele sînt compuse.

Astfel, propoziţia „$2+2=4$" este elementară.

---

* Pentru expunerea logicii matematice am utilizat în special lucrările: D. Hilbert, W. Ackermann *Bazele logicii teoretice*, A. Church *Introducerea în logica matematică*, Gr. C. Moisil *Încercări vechi şi noi de logică neclasică*. Vezi în text trimiteri complete la aceste lucrări. Pentru logica relaţiilor recomandăm David Garcia, *Introduccio à logistica*, Barcelona, 1934.

Propoziţiile elementare vor fi desemnate cu literele $p, q, r, \ldots$, în aşa fel că nici o literă nu va desemna mai mult de o propoziţie deodată. Aceste litere se vor numi „variabile propoziţionale". Propoziţiile compuse sînt formate din propoziţii elementare cu ajutorul anumitor expresii de legătură, cum sînt „şi", „sau", „nu", „dacă... atunci", „dacă şi numai dacă" ş.a. Iată cîteva exemple:

a) „$2+2=4$ şi $3+1=4$";

b) „$a+b \geq b$ sau $a+b=b$";

c) „$a+b=b$ sau $a+b>b$";

d) „nu este adevărat că $3+2=4$";

e) „dacă $a=b$, atunci $a+1=b+1$";

f) „$a+1=b+1$ dacă şi numai dacă $a=b$".

Propoziţia *a)* este o propoziţie conjunctivă, propoziţia *b)* este o propoziţie disjunctiv-neexclusivă (alternativă); propoziţia *c)* este disjunctiv-exclusivă; propoziţia *d)* este negativă; *e)* este o propoziţie implicativă, iar *f)* este o propoziţie reciproc-implicativă.

În limbajul simbolic, propoziţiile compuse vor fi notate respectiv cu $p \,\&\, q$ („p şi q"), $p \vee q$ („p sau q"), $p+q$ („sau p, sau q"), $\bar{p}$ („non-p"), $p \rightarrow q$ („dacă p, atunci q"), $p=q$ („numai dacă p, atunci q").

Semnele &, V, +, —, → şi = vor fi numite *operatori (functori)* logici şi vor purta numele propoziţiilor compuse corespunzătoare.

Între valorile logice ale propoziţiilor componente şi valoarea logică a propoziţiei compuse există o anumită corespondenţă. Astfel, dacă propoziţia conjunctivă este adevărată, componentele ei nu pot să fie decît adevărate, iar dacă ea este falsă, cel puţin una dintre componentele ei este falsă. Stabilind pentru fiecare tip de propoziţie corespondenţele posibile între valorile părţilor şi valorile întregului, putem pe această bază să introducem ideea de funcţie de adevăr.

În continuare vom introduce prin definiţie următoarele funcţii de adevăr:

1. Numim *funcție conjunctivă*-simbolic $p\&q$-funcția logică adevărată atunci și numai atunci cînd toate argumentele ei iau valoarea de adevăr.

2. Numim *funcție disjunctiv-neexclusivă* (alternativă)-simbolic $p \vee q$-funcția logică adevărată atunci și numai atunci cînd cel puțin unul dintre argumentele ei este adevărat.

3. Numim *funcție disjunctiv-exclusivă* (excludere)-simbolic $p+q$-funcția logică adevărată atunci și numai atunci cînd numai un argument ia valoarea adevărat.

4. Numim *funcție negativă* (negație)-simbolic $\bar{p}$-funcția logică adevărată atunci cînd argumentul ei ia valoarea fals și falsă atunci cînd argumentul ei ia valoarea adevăr.

5. Numim *funcție implicativă* (implicație materială)-simbolic $p \rightarrow q$-funcția logică falsă atunci și numai atunci cînd antecedentul ei ia valoarea adevăr, iar consecventul ia valoarea fals.

6. Numim *echivalență*-simbolic $p=q$-funcția logică adevărată atunci și numai atunci cînd argumentele ei iau aceeași valoare. Aceste definiții pot fi date și cu ajutorul unor tabele numite „matrice".

pq	$p\&q$
vv	*v*
vf	*f*
fv	*f*
ff	*f*

pq	$p \vee q$
vv	*v*
vf	*v*
fv	*v*
ff	*f*

pq	$p+q$
vv	*f*
vf	*v*
fv	*v*
ff	*f*

p	$\bar{p}$
v	*f*
f	*v*

pq	$p \rightarrow q$
vv	*v*
vf	*f*
fv	*v*
ff	*v*

pq	$p=q$
vv	*v*
vf	*f*
fv	*f*
ff	*v*

În aceste matrice, în partea stîngă, sînt așezate argumentele funcției și valorile pe care le pot lua, iar în dreapta este așezată funcția și valorile corespunzătoare ei.

În afară de funcțiile de mai sus pot fi construite și funcții mai complicate, ale căror argumente sînt funcțiile deja con-

struite. Pentru a scrie funcții mai complicate ne folosim de paranteze.

Exemple:

$$(p\&q)\rightarrow p$$
$$p\rightarrow(q\rightarrow p)$$
$$\bar{p}\rightarrow(p\&\bar{p})$$
$$(p+q)\rightarrow(p\vee q)$$

Funcțiile conjunctivă, alternativă și excluderea pot avea mai mult de două argumente deodată:

$$p\&q\&\ldots\&t;\quad p\vee q\vee r\vee\ldots\vee t;\quad p+q+r+\ldots+t.$$

Cu un număr n de variabile putem construi 2^{2^n} expresii diferite. Iată expresiile și respectiv funcțiile în cazul în care $n=2$:

pq	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
vv	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*	*v*	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*	*f*
vf	*v*	*v*	*v*	*v*	*f*	*f*	*f*	*f*	*v*	*v*	*v*	*v*	*f*	*f*	*f*	*f*
fv	*v*	*v*	*f*	*f*	*v*	*v*	*f*	*f*	*v*	*v*	*f*	*f*	*v*	*v*	*f*	*f*
ff	*v*	*f*	*v*	*f*	*v*	*f*	*v*	*f*	*v*	*f*	*v*	*f*	*v*	*f*	*v*	*f*

Există aici 16 funcții, numerotate de la 0 la 15. Funcțiile 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 și 12 sînt respectiv: disjuncția neexclusivă, afirmare de p, implicația, afirmare de q, echivalența, conjuncția, excluderea, negarea lui q și negarea lui p. Restul funcțiilor nu au fost introduse de la început. Ele sînt: tautologia (0), implicația inversă (2), incompatibilitatea (8), negația implicației (11), negația implicației inverse (13), negația disjuncției (14) și contradicția (15).

Incompatibilitatea (sau negarea conjuncției) se scrie $\overline{p\&q}$ sau, cu un semn special, /, care poartă numele de „bara lui Sheffer": p/q. Funcțiile pot fi clasificate în trei categorii: a) tautologii, b) contradicții, c) funcții realizabile.

Tautologiile mai poartă numele și de *legi logice, identități logice, funcții identic-adevărate*, iar contradicțiile se mai numesc și *funcții identic-false*.

Tautologiile sînt funcţiile logice adevărate independent de valorile pe care le iau argumentele, iar contradicţiile sînt funcţiile logice false independent de valorile pe care le iau argumentele.

Funcţia realizabilă este aceea care ia valoarea adevăr cel puţin într-un caz.

Problemele teoriei funcţiilor de adevăr

Există un şir de probleme pe care trebuie să le soluţioneze această teorie, dintre care amintim pe cele mai importante.

1. *Problema deciziei* (problema fundamentală a logicii matematice): *fiind dată o expresie logică, să se decidă dacă reprezintă o tautologie, o contradicţie sau pur şi simplu o funcţie realizabilă.*

2. *Problema echivalenţei*: fiind date două sau mai multe expresii logice, să se decidă dacă ele sînt sau nu echivalente.

3. *Problema posibilităţii deductive*: fiind dată o expresie (sau mai multe), să se arate care sînt premisele şi, respectiv, concluziile acestei expresii.

4. *Problema minimizării*: fiind dată o funcţie, să se determine care este expresia ei cu cel mai mic număr de semne.

Procedee de rezolvare. Procedeele de rezolvare mai poartă numele şi de „algoritmi". Numim *algoritm* orice sistem finit şi bine determinat de reguli care ne ajută să ajungem după un număr limitat de paşi de la anumite date la un anumit rezultat.

Pentru rezolvarea problemelor de mai sus avem două procedee importante: *procedeul matriceal* şi *procedeul transformărilor logice*. În anumite cazuri, aceste două procedee se îmbină. Să considerăm pe rînd problemele de mai sus şi să vedem cum pot fi ele rezolvate.

1. *Problema deciziei.* Putem foarte uşor, atunci cînd numărul de argumente este $n \leqslant 3$, să aplicăm procedeul matriceal pentru a determina valorile funcţiei date. Acest procedeu constă în a construi matricea funcţiei. Expresia se rezolvă pornind de la expresiile componente cele mai simple.

Exemplul 1. Să se determine valoarea expresiei $(p \& q) \to p$:

pq	$p\&q$	$(p\&q)\to p$
vv	v	v
vf	f	v
fv	f	v
ff	f	v

Avem deci $(p\&q)\to p = v\ v\ v\ v$, ceea ce înseamnă că funcţia este o lege logică (tautologie). Această lege înseamnă: „conjuncţia implică totdeauna partea sa".

Exemplul 2. Să se decidă asupra expresiei $(p \vee q) \to (\bar{p} \& q)$:

pq	$p \vee q$	$\bar{p}$	$\bar{p}\&q$	$(p\vee q)\to(\bar{p}\&q)$
vv	v	f	f	f
vf	v	f	f	f
fv	v	v	v	v
ff	f	v	f	v

Avem deci: $(p\vee q)\to(\bar{p}\&q) = f\ f\ v\ v$, ceea ce înseamnă o expresie realizabilă (adevărată doar pentru o parte din cazuri).

Să urmărim cum s-a produs rezolvarea. În stînga am aşezat expresiile cele mai simple, adică p, q; urmează apoi expresiile compuse din acestea: $p\vee q$ şi $\bar{p}$ ş.a.m.d., pînă ajungem la expresia noastră. Fiecare expresie se rezolvă în conformitate cu definiţiile date funcţiilor respective.

Exemplu. Să se decidă asupra expresiei $\overline{p\to(q\to p)}$:

pq	$q\to p$	$p\to(q\to p)$	$\overline{p\to(q\to p)}$
vv	v	v	f
vf	v	v	f
fv	f	v	f
ff	v	v	f

Avem deci: $\overline{p\to(q\to p)} = f\ f\ f\ f$, ceea ce înseamnă că expresia respectivă reprezintă o contradicţie.

Legi logice

Din mulţimea expresiilor logice separăm submulţimea legilor logice. Acesta este, de fapt, şi scopul principal al logicii. În cele ce urmează dăm cele mai importante legi logice (cititorul

le poate verifica cu ajutorul matricelor). Pentru a le da o formă mai generală vom folosi metavariabilele A, B, C, ...

1) $A = A$
2) $A \rightarrow A$
} legile identităţii;

3) $\overline{A \& \bar{A}}$
4) $A \& \bar{A} = f$
5) $\overline{A \& \bar{A}} = v$
} legile noncontradicţiei;

6) $A \vee \bar{A}$
7) $A \vee \bar{A} = v$
} legile terţului exclus;

8) $\bar{\bar{A}} \rightarrow A$
9) $\bar{\bar{A}} = A$
} legile dublei negaţii;

10) $A \& B = B \& A$
11) $A \vee B = B \vee A$
} legile comutativităţii;

12) $(A \& B) \& C = A \& (B \& C)$
13) $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$
} legile asociativităţii;

14) $A \& (B \vee C) = (A \& B) \vee (A \& C)$
15) $A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C)$
} legile distributivităţii.

Legile 1)—9) corespund bine cunoscutelor principii ale logicii generale.

Legile 10)—15) exprimă proprietăţile funcţiilor de adevăr. Astfel conjuncţia şi disjuncţia sînt comutative (adică valoarea lor nu depinde de ordinea argumentelor) şi asociative (valoarea lor nu depinde de gruparea argumentelor).

16) $A \& (A \vee B) = A$
17) $A \vee (A \& B) = A$
} legile absorbţiei;

18) $A \vee A = A$
19) $A \& A = A$
} legile idempotenţei;

20) $AB \& A\bar{B} = A$
21) $AB \vee A\bar{B} = A$
} legile excluderii (sau „contopirii");

22) $A \& v = A$
23) $A \vee f = A$
24) $A \& f = f$
25) $A \vee v = v$
} legile posibilităţii;

26) $\overline{A \& B} = \bar{A} \vee \bar{B}$ } legile lui de Morgan;
27) $\overline{A \vee B} = \bar{A} \& \bar{B}$ }

28) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ (adevărul decurge din orice);

29) $\bar{A} \rightarrow (A \rightarrow B)$ (falsul implică orice);

30) $A \rightarrow B = \bar{B} \rightarrow \bar{A}$ (legea contrapoziției);

31) $(A \rightarrow \bar{A}) \rightarrow \bar{A}$ } legile reducerii la absurd;
32) $[(A \rightarrow B) \& (A \rightarrow \bar{B})] \rightarrow \bar{A}$ }

33) $[(A \rightarrow B) \& (B \rightarrow C)] \rightarrow (A \rightarrow C)$ (legea tranzitivității);

34) $[A \& (A \rightarrow B)] \rightarrow B$ (legea modus ponens);

35) $A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$
36) $A + B = (A \& \bar{B}) \vee (B \& \bar{A})$
37) $(A = B) = (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$
38) $(A = B) = (\bar{A}B \& \bar{B}A)$
39) $A / B = \bar{A} \vee \bar{B}$
} legi care exprimă reducerea functorilor.

Procedeul formelor normale

Acest procedeu se bazează pe ideea de „transformare logică". Unele expresii logice sînt echivalente cu altele. Trecerea de la o expresie dată la una echivalentă cu ea poartă numele de *transformare logică*.

Există posibilitatea *de a alege un număr de operatori (functori) în așa fel, încît toți ceilalți să poată fi reduși la aceștia prin definiție*. Ca rezultat putem obține forme ale logicii funcțiilor de adevăr cu un număr mai mic de semne.

Iată cîteva posibilități: (&, +, —) (Boole). →, — (Frege); V, — (Russell); &, V, — (logica booleeană); / (Nicod.); &, — (Brentano).

Cu unii functori se pot construi doar sisteme parțiale: de exemplu (=, —) (Tarski). Ca urmare, obținem calcule logice de diferite forme. Pentru studiul logicii este important să considerăm toți functorii care pot să apară. În acest caz vom separa un grup de functori ca functori *de bază*, iar restul vor fi reduși la aceștia prin definiție. De exemplu, $p \rightarrow q = \bar{p} \vee q$. Unul dintre cele mai interesante calcule logice este calculul booleean cu functorii &, V și —. În acest calcul vom defini formele nor-

male booleene. Pentru aceasta este nevoie să introducem mai întîi unele noţiuni ajutătoare:

1) variabilele şi negaţiile lor vor fi numite *termeni primi*;

2) următoarele expresii sînt *conjuncţii prime*: a) termeni primi, b) orice conjuncţie de termeni primi în care literele nu se repetă;

3) următoarele expresii sînt *disjuncţii prime**: a) termenii primi, b) orice disjuncţie a termenilor primi în care literele nu se repetă;

4) se numeşte *formă normală conjunctivă* conjuncţia oricărei mulţimi de disjuncţii prime;

5) se numeşte *formă normală disjunctivă* disjuncţia oricărei mulţimi de conjuncţii prime.

Exemple. Expresia $(p \vee \bar{q})$ & $(p \vee q)$ este o formă normală conjunctivă, iar $(p \& q) \vee (\bar{p} \& q \& r)$ este o formă normală disjunctivă.

Orice funcţie poate fi adusă la aceste forme normale. Dacă funcţia este reprezentată doar de o simplă variabilă, atunci această variabilă poate fi considerată atît ca formă normală conjunctivă, cît şi ca formă normală disjunctivă cu un singur membru. De exemplu, p, q, r, ... sînt astfel de funcţii. O conjuncţie de termeni primi (fără negaţie), de exemplu $(p \& q)$ luată ca întreg, este o f.n.d. cu un singur membru; considerată în raport cu părţile ei, este o f.n.c. O disjuncţie de termeni primi (fără negaţie), de exemplu $(p \vee q)$ luată ca întreg, este o f.n.c. cu un singur membru; luată în raport cu părţile ei, este o f.n.d.

Prin definiţie, forma normală presupune următoarele proprietăţi: a) negaţia cade numai pe variabile, b) nici un alt functor afară de &, $\vee$, — nu poate să apară în forma normală, c) în f.n.c. functorul & nu poate apărea în membrii expresiei, d) în f.n.d. functorul $\vee$ nu poate apărea în membrii expresiei.

În presupunerea că o expresie nu îndeplineşte nici una dintre condiţiile cerute formei normale, ea poate fi *normalizată* în următorul fel:

---

* În caz că în calcul sînt introduse şi alte semne ca v, f, atunci noţiunile de conjuncţie şi disjuncţie prime se generalizează.

a) se elimină cu ajutorul definiţiilor functorii care nu trebuie să apară în f.n.;

b) se deplasează negaţia pe variabile cu ajutorul legilor lui de Morgan şi a dublei negaţii;

c) se transformă expresia obţinută în f.n.c. sau în f.n.d. cu ajutorul regulilor distributivităţii şi asociativităţii.

Exemplul 1.

Să se aducă la f.n.c. expresia $\overline{(p\to q)\vee r}$. Procedăm în felul următor: a) eliminăm functorul nebooleean conform cu legea de reducere corespunzătoare şi obţinem $\overline{(\bar{p}\vee q)\vee r}$; b) coborîm negaţia conform cu o lege a lui de Morgan: $\overline{(\bar{p}\vee q)}\&\bar{r}$; c) coborîm din nou negaţia conform cu o lege a lui de Morgan: $(\bar{\bar{p}}\&\bar{q})\&\bar{r}$; d) suprimăm dubla negaţie: $(p\&\bar{q})\&\bar{r}$; e) suprimăm parantezele, ceea ce este permis pe baza legii asociativităţii conjuncţiei: $p\&\bar{q}\&\bar{r}$.

Această ultimă formă este f.n.c., dar ea poate fi tratată şi ca f.n.d. cu un singur membru: $(p\&\bar{q}\&\bar{r})$. Se observă că n-am avut nevoie de aplicarea legii distributivităţii.

Exemplul 2. Să se aducă la f.n.d. expresia $(p\vee q)\&\overline{(r\vee p)}$. Coborîm negaţia pe variabile şi operăm o distributivitate: a) $(p\vee q)\&(\bar{r}\&\bar{p})$; b) $[(\bar{r}\&\bar{p})\&p]\vee[(\bar{r}\&\bar{p})\&q]$; c) $(\bar{r}\&\bar{p}\&p)\vee$ $\vee(\bar{r}\&\bar{p}\&q)$, ceea ce este f.n.d.

Cum decidem cu ajutorul formelor normale?

Dacă f.n.c. conţine în fiecare membru o expresie de forma terţului exclus $(A\vee\bar{A})$, atunci funcţia respectivă este o lege logică.

Dacă f.n.c. nu conţine în fiecare membru o expresie de forma $A\vee\bar{A}$, atunci funcţia poate fi realizabilă sau contradicţie.

Dacă f.n.d. a unei funcţii conţine în fiecare membru o expresie de forma contradicţiei $(A\&\bar{A})$, atunci funcţia respectivă este o contradicţie.

Dacă f.n.d. nu conține în fiecare membru o expresie de forma $A\&\bar{A}$, atunci funcția este cel puțin realizabilă și trebuie văzut dacă este lege logică.

Exemplul 1. Să se decidă cu ajutorul formelor normale asupra expresiei $p\to(q\to p)$. O aducem la f.n.c. $\bar{p}\vee(\bar{q}\vee p)$. Suprimăm parantezele și obținem f.n.c. cu un singur membru: $\bar{p}\vee\bar{q}\vee p$. Această expresie reprezintă o lege logică, deoarece conține (în unicul membru) expresia $p\vee\bar{p}$.

Exemplul 2. Să se decidă cu ajutorul formelor normale asupra expresiei $\overline{p\to(q\to p)}$. O aducem la f.n.c.:

$$\overline{\bar{p}\vee(\bar{q}\vee p)}$$
$$\bar{\bar{p}}\&\overline{(\bar{q}\vee p)}$$
$$p\&(\bar{\bar{q}}\&\bar{p})$$
$$p\&q\&\bar{p}$$

Aceasta este o f.n.c. cu trei membri p, q, $\bar{p}$. Ea nu exprimă o lege logică.

Ea este totodată o f.n.d. cu un singur membru. Deoarece în unicul ei membru conține $p\&\bar{p}$, rezultă că exprimă o contradicție.

Exemplul 3. Să se decidă asupra expresiei $(p\&q)\to r$

$$(p\&q)\to r$$
$$\overline{p\&q}\vee r$$
$$\bar{p}\vee\bar{q}\vee r$$

Aceasta este o f.n.c. cu un singur membru. Ea nu este lege logică. Ea este totodată f.n.d. cu trei membri. Ea nu este contradicție. În consecință este o funcție simplu realizabilă.

Convenție de scriere. Cînd într-o expresie apar deopotrivă semnele & și V, convenim să nu scriem pe cel care nu joacă rolul principal, subînțelegîndu-l.

Problema echivalenței. Această problemă poate fi rezolvată cu ajutorul matricelor sau al procedeului formelor normale perfecte. Procedeul matricelor se aplică ușor: se determină seriile de valori ale funcțiilor respective și se compară între ele; dacă avem aceeași serie de valori, atunci expresiile reprezintă aceeași funcție. Un alt procedeu este cel al formelor normale perfecte.

Numim formă normală perfectă acea f.n. care satisface condiţiile: a) fiecare membru al expresiei conţine toate literele care apar în expresie; b) nici o literă nu poate apărea într-un membru mai mult de o singură dată; c) nici o literă nu poate apărea într-un membru împreună cu negaţia ei; d) nici un membru nu poate apărea mai mult de o singură dată.

Cum se aduce la f.n.p.? Pentru a aduce o funcţie în forma n.p. ne folosim de următorul algoritm: a) se aduce expresia la f.n.; b) dacă într-un membru lipseşte o literă, ea se adaugă după una dintre regulile:

$\alpha \vee (t \& \bar{t})$ (pentru f.n.c.);

$\alpha \& (t \vee \bar{t})$ (pentru f.n.d.),

unde α este membrul respectiv, iar t litera care lipseşte; c) dacă o literă apare împreună cu negaţia, tot membrul respectiv se elimină; d) dacă o literă apare de mai multe ori, o reţinem numai o dată; e) dacă un membru apare de mai multe ori, îl reţinem numai o dată.

Exemplul 1. Să se aducă la f.n.p.c. expresia $p \rightarrow (q \& r)$. Prin operaţii obţinem $\bar{p} \vee (q \& r)$ şi apoi $\bar{p}\, q \& \bar{p}\, r$. Această ultimă expresie este f.n.c., dar ea nu este perfectă, deoarece în primul membru lipseşte litera r, iar în al doilea litera q. Adăugăm literele conform cu regula

$$\alpha \vee (t \& \bar{t}):$$

$$(\bar{p}\; q(r \& \bar{r})) \& (\bar{p}\; r(q \& \bar{q}))$$

$$\bar{p}\; q\; r \& \bar{p}\; q\; \bar{r}\; \& \bar{p}\; \bar{q}\; r$$

Această ultimă expresie este o formă normală conjunctivă perfectă.

Exemplul 2. Să se aducă la f.n.d.p. expresia: $\bar{p} \vee \overline{(q \vee r)}$. Prin legea lui de Morgan obţinem $\bar{p} \vee (\bar{q} \& \bar{r})$. Aceasta este f.n.d., dar nu perfectă, deoarece din membrul întîi lipsesc literele q şi r, iar din membrul doi litera p. Adăugăm pe rînd literele conform cu regula $\alpha \& (t \vee \bar{t})$:

$\bar{p} \& (q \vee \bar{q}) \vee (\bar{q} \& \bar{r}) \& (p \vee \bar{p})$ (distribuim);

$\bar{p}\; q \vee \bar{p}\; \bar{q} \vee \bar{q}\; \bar{r}\; p \vee \bar{q}\; \bar{r}\; \bar{p}$ (adăugăm litera r);

$\bar{p}\; q\; (r \vee \bar{r}) \vee \bar{p}\; \bar{q}\; (r \vee \bar{r}) \vee\; \bar{q}\; \bar{r}\; p \vee \bar{q}\; \bar{r}\; \bar{p}$ (distribuim);

$\bar{p}\, q\, r \vee \bar{p}\, q\, \bar{r} \vee \bar{p}\, \bar{q}\, r \vee \bar{p}\, \bar{q}\, \bar{r} \vee \bar{q}\, \bar{r}\, p \vee \bar{q}\, \bar{r}\, \bar{p}$ (așezăm literele în ordine alfabetică, ceea ce ne este permis prin legea comutativității conjuncției):

$\bar{p}\, q\, r \vee \bar{p}\, q\, \bar{r} \vee \bar{p}\, \bar{q}\, r \vee \bar{p}\, \bar{q}\, \bar{r} \vee p\, \bar{q}\, \bar{r} \vee \bar{p}\, \bar{q}\, \bar{r}$.

Se observă că membrul $\bar{p}\, \bar{q}\, \bar{r}$ se repetă; operăm reducerea conform cu legea idempotenței:
$\bar{p}\, q\, r \vee \bar{p}\, q\, \bar{r} \vee \bar{p}\, \bar{q}\, r \vee p\, \bar{q}\, \bar{r} \vee \bar{p}\, \bar{q}\, \bar{r}$. Aceasta este o formă normală disjunctivă perfectă.

Cum determinăm dacă două expresii reprezintă aceeași funcție? Aducem expresiile la *una dintre* formele n.p. (la care este posibil) și, dacă f.n. sînt identice, atunci ele sînt identice. De remarcat că tautologiile (legile logice) nu au f.n.c.p., iar contradicțiile nu au f.n.d.p. Pentru a aduce o expresie la f.n.p., ne putem ajuta, atunci cînd numărul de argumente nu depășește 3, de procedeul matriceal.

Problema posibilităților deductive. Această problemă are două laturi: a) aflarea tuturor ipotezelor (sau concluziilor) unor expresii date; b) aflarea celor mai simple ipoteze (sau concluzii). Procedeul pentru prima latură a problemei este simplu: se conjugă expresiile date și se aduce conjuncția la f.n.c.p. și fiecare parte a acestei f.n.c.p. va fi o concluzie a expresiei respective; se disjungă expresiile și se aduce apoi disjuncția la f.n.d.p. și fiecare parte a acestei f.n.d.p. va reprezenta o ipoteză (premisă) a expresiei date.

Principiul dualității. Formele algebrei booleene se comportă simetric prin raport cu semnele & și $\vee$. Aceste semne sînt, cu alte cuvinte, *duale*. De exemplu, de la formula $(p \& q) \vee r$ putem obține pe această cale formula $(p \vee q) \& r$. Formulele care se pot obține pe această cale una din alta vor fi numite formule duale, semnele & și $\vee$ fiind de asemenea numite duale. Avînd o formulă A, vom nota duala sa prin A^*. Se poate enunța în continuare următorul *principiu de dualitate*: dacă $A = B$, atunci $A^* = B^*$. De exemplu, din $\overline{p \& q} = \bar{p} \vee \bar{q}$ (o lege a lui de Morgan) se poate obține pe baza principiului dualității $\overline{p \vee q} = \bar{p} \& \bar{q}$ (a doua lege a lui de Morgan).

Construcţia axiomatică a calculului propoziţiilor

Calculul propoziţiilor poate fi organizat în mod axiomatic şi pur formal (adică abstracţie făcînd de orice referire la semnificaţiile variabilelor, de exemplu la aceea că ele pot lua valorile de adevăr sau fals). Există multe calcule axiomatice *corespunzătoare* teoriei funcţiilor de adevăr. Ele diferă în ce privește forma, felul axiomelor, numărul axiomelor sau regulile. Am ales pentru exemplificare sistemul axiomatic construit de Hilbert și Ackermann, cu modificarea că am luat trei reguli de deducţie și nu două.

Axiome

a) $(p \vee p) \rightarrow p$;
b) $p \rightarrow (p \vee q)$;
c) $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$;
d) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(r \vee p) \rightarrow (r \vee q)]$.

Functorul $\rightarrow$ este o prescurtare dată prin definiţia $p \rightarrow q = \bar{p} \vee q$.

Reguli de deducţie

1. *Regula substituţiei.* O variabilă oarecare poate fi înlocuită cu orice formulă corectă, cu condiţia ca înlocuirea să se facă peste tot unde variabila apare în formulă. Variabila nu poate fi înlocuită în același timp decît cu o singură formulă*.

2. *Regula detașării (modus ponens).* Dacă A și $A \rightarrow B$ sînt formule demonstrate, atunci B este o formulă demonstrată.

3. *Regula tranzitivităţii.* Dacă $A \rightarrow B$ și $B \rightarrow C$ sînt formule demonstrate, atunci $A \rightarrow C$ este o formulă demonstrată.

O formulă se consideră *demonstrată* dacă este axiomă sau dacă este dedusă din axiome cu ajutorul regulilor 1—3. Orice formulă demonstrată se mai numește *teoremă*. În mod obișnuit prin „teoremă" se înţelege numai propoziţia dedusă conform cu

---

* O regulă derivată importantă este regula substituirii echivalentelor. Fiind dată o expresie Φ (p), unde p este o parte a lui Φ, p poate fi înlocuit cu o expresie oarecare q dacă $p = q$ (p este echivalent cu q).

regulile din axiome. În cazul nostru, termenul de ***teoremă*** **este** luat, din anumite considerente logice, într-un sens mai **general.**

Exemple de demonstrație

Teorema 1. $\bar{p} \vee p$.

În ax. b) se substituie q cu p și se obține

$$p \rightarrow (p \vee p).$$

La această formulă și la ax. a) se aplică regula tranzitivității:

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow (p \vee p) \\ (p \vee p) \rightarrow p \end{array}}{p \rightarrow p}$$

Formula $p \rightarrow p$ este o prescurtare pentru $\bar{p} \vee p$.

Teorema 2. $p \vee \bar{p}$.

În ax. c) se substituie p cu $\bar{p}$ și q cu p și se obține

$$(\bar{p} \vee p) \rightarrow (p \vee \bar{p}).$$

Din această formulă, conform cu teorema 1 și cu regula *modus ponens* obținem formula $p \vee \bar{p}$ astfel:

$$\frac{\begin{array}{l} \bar{p} \vee p \\ (\bar{p} \vee p) \rightarrow (\bar{p} \vee p) \end{array}}{p \vee \bar{p}}$$

Teorema 3. $p \rightarrow \bar{\bar{p}}$.

În teorema 2 se substituie p cu $\bar{p}$ și se obține $\bar{p} \vee \bar{\bar{p}}$.

De aici, conform cu definiția implicației, obținem

$$p \rightarrow \bar{\bar{p}}.$$

Demonstrația decurge pur formal, adică nu se face nici un apel la conținutul simbolurilor, ci ele sînt mînuite numai conform cu regulile indicate.

Proprietățile sistemelor axiomatice

Un sistem axiomatic pentru a fi admis trebuie să satisfacă următoarele trei proprietăți: noncontradicție, independență și completitudine. Deoarece sistemul axiomatic poate fi formalizat sau interpretat, aceste trei proprietăți sînt formulate la nivelul interpretării („semantic") sau la nivelul sistemului formal

(„sintactic"). Noţiunile sintactice (formale) sînt introduse pe baza noţiunilor semantice, aşa cum noţiunea de sistem formal se obţine pornind de la o teorie intuitivă.

Noncontradicţia (consistenţa)

Formulări sintactice:

a) Un sistem este relativ necontradictoriu dacă în el nu se poate deduce o formulă A împreună cu negaţia ei $\bar{A}$.

b) Un sistem este *absolut necontradictoriu* dacă nu toate formulele construibile în acest sistem sînt teoreme în el.

c) Un sistem este *necontradictoriu în sensul lui Post* dacă nici o variabilă propoziţională nu este teoremă în acest sistem.

d) Un sistem este necontradictoriu dacă există o formulă care nu se deduce în sistem.

Formulări semantice:

a) Un sistem este semantic necontradictoriu dacă prin interpretare nici o formulă nu devine adevărată împreună cu contradictoria ei.

b) Un sistem este semantic necontradictoriu dacă nici o formulă falsă prin interpretare nu poate fi dedusă în acest sistem.

c) Un sistem este semantic necontradictoriu dacă poate fi interpretat necontradictoriu.

Independenţa

a) Un sistem de axiome şi de reguli este independent dacă nici una dintre aceste axiome şi reguli nu este deductibilă din restul axiomelor.

b) O axiomă este semantic independentă dacă există o interpretare care satisface pe toate celelalte axiome, dar nu o satisface pe aceasta (formulare semantică).

„Cerinţa independenţei axiomelor şi regulilor — scrie A. Church — nu trebuie socotită obligatorie"[1]. În realitate, lucrurile nu stau astfel, căci cerinţa de independenţă traduce cerinţa obişnuită a oricărei demonstraţii de a nu cuprinde un cerc vicios.

---

[1] A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, Princeton-New Jersey, Princeton University Press, 1956, p. 112.

Completitudinea

a) Un sistem este sintactic complet dacă prin anexarea unei variabile propoziţionale la teoremele sale devine contradictoriu.

b) Un sistem este semantic complet dacă toate formulele adevărate prin interpretare sînt axiome sau teoreme în el.

Se poate demonstra că sistemul axiomatic considerat (Hilbert—Ackermann) are toate cele trei proprietăţi. El este necotradictoriu relativ la definiţiile funcţiilor de adevăr, în sensul că nu se poate deduce o formulă de forma $v = f$. Toate teoremele care pot fi dovedite cu ajutorul matricelor sînt teoreme şi în acest sistem, nici o altă formulă nefiind teoremă. Cu alte cuvinte, orice formulă devine prin interpretare tautologie şi oricărei tautologii din teoria funcţiilor de adevăr îi corespunde o teoremă în acest sistem. În acest fel, sistemul este complet. Hilbert şi Ackermann au dovedit de asemenea independenţa axiomelor şi a regulilor substituţiei şi *modus ponens*. Este convenabil să se ia ca regulă primă (nederivată) regula tranzitivităţii implicaţiei.

Reproducem după Hilbert şi Ackermann *(Bazele logicii teoretice)* demonstrarea acestor proprietăţi.

Demonstraţia noncontradicţiei. Pentru a demonstra această proprietate, apelăm la mulţimea de semnificaţii $\{1,0\}$. Operatorii vor fi definiţi matriceal, aşa cum s-a arătat. Se arată mai întîi că toate axiomele au valoarea 1, indiferent de valorile 1 sau 0 acordate variabilelor. Calculul se face matriceal. În al doilea rînd, se arată că toate formulele deduse prin cele trei reguli au de asemenea valoarea 1.

Reg. I (modus ponens). $A, A \rightarrow B \vdash B$. Formulele A şi $A \rightarrow B$ reprezintă axiome, deci $A = 1$, $A \rightarrow B = 1$.

Presupunem că $B = 0$. Substituim în $A \rightarrow B = 1$ pe A şi B cu valorile lor, respectiv cu 1 şi 0, şi obţinem $1 \rightarrow 0 = 1$, ceea ce contrazice definiţia implicaţiei şi deci nu poate fi acceptată. Rezultă de aici că B nu poate avea valoarea 0, ci trebuie să

aibă valoarea 1. Orice formulă dedusă prin regula I din axiome va avea valoarea 1.

Reg. II (substituție). Fie o axiomă A care conține o variabilă p, ceea ce vom scrie $A\ (p)$, iar $A\ (p) = 1$. Aceasta înseamnă că, oricare ar fi valorile lui p, 1 sau 0, valoarea axiomei nu se schimbă, deci $A\ (1) =$ și $A(0) = 1$.

Punînd în locul lui p o variabilă q, vom obține formula $A\ (q)$. Presupunem că $A\ (q) = 0$. Dar $q = 1$ sau $q = 0$; rezultă că $A(1) = 0$ și $A(0) = 0$. Or, aceste două formule contrazic formulele $A\ (1) = 1$ și $A(0) = 1$. În concluzie, $A\ (q)$ nu poate avea valoarea 0, ci trebuie să fie $A\ (q) = 1$.

Reg. III. $A \to B$, $B \to C \vdash A \to C$. Deoarece $A \to B$ și $B \to C$ sînt axiome, vom avea $A \to B = 1$, $B \to C = 1$.

Presupunem că $A \to C = 0$. Prin matricea implicației rezultă că $A = 1$ și $C = 0$, deoarece implicația este falsă numai cînd avem $1 \to 0$. Așa stînd lucrurile, revenim la cele două axiome și înlocuim pe A cu 1 și pe C cu 0. Vom obține $1 \to B = 1$, $B \to 0 = 1$. Aceste două formule nu mai sînt adevărate, deoarece pentru $B = 0$ obținem $1 \to 0 = 1$, iar pentru $B = 1$ obținem $1 \to 1 = 1$. Rezultă că $A \to C$ nu poate avea valoarea 0 ci $A \to C = 1$.

Demonstrația independenței.

Axioma a). Pentru a demonstra această axiomă se alege o mulțime de semnificații (0, 1, 2). Iată definiția celor doi functori:

p	0	1	2
$\bar{p}$	1	0	2

Negație

$p \diagdown q$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	0

Disjuncție

Se demonstrează că axiomele b), c), d) și teoremele deduse din ele au valoarea 0, în timp ce axioma a) nu are această proprietate. Verificăm acest lucru pentru axioma b): $p \to (p \vee q)$, adică, conform cu definiția implicației, $\bar{p} \vee (p \vee q)$:

$p\ q$	$\bar{p} \vee (p \vee q)$		
0 0	1	0	0
0 1	1	0	0
0 2	1	0	0
1 0	0	0	0
1 1	0	0	1
1 2	0	0	2
2 0	2	0	0
2 1	2	0	2
2 2	2	0	0

Analog dovedim că axiomele c) și d) au valoarea 0.

Pentru teoreme procedeul de demonstrație este analog cu cel dat în cazul dovedirii noncontradicției. Se consideră fiecare regulă și se arată că aplicarea ei la axiomele b), c), d) duce la o formulă a cărei valoare este 0. Axioma a) nu are proprietatea amintită:

$$\overline{p \vee p} \vee p$$
$$\overline{0 \vee 0} \vee 0 = 0$$
$$\overline{1 \vee 1} \vee 1 = 0 \vee 1 = 0$$
$$\overline{2 \vee 2} \vee 2 = \overline{0} \vee 2 = 1 \vee 2 = 2$$

În cazul în care p ia valoarea 2, rezultatul va fi 2.

Axioma b). Considerăm mulțimea de semnificații {0,1,2,3.}
Definim operatorii — și ∨:

p	0 1 2 3
$\bar{p}$	1 0 3 2
	Negație

p \ q	0 1 2 3	
0	0 0 0 0	
1	0 1 1 1	Disjuncție
2	0 1 2 2	
3	0 1 2 3	

Se demonstrează matriceal că axiomele a), c) și d) și teoremele care decurg din ele au prin raport cu aceste semnificații numai semnificațiile 0 sau 2, în timp ce axioma b) nu are această proprietate.

Fie axioma a). Se substituie pe rînd p cu 0, 1, 2, 3:

$$\overline{p \vee p} \vee p$$
$$\overline{0 \vee 0} \vee 0 = 1 \vee 0 = 0$$
$$\overline{1 \vee 1} \vee 1 = 0 \vee 1 = 0$$
$$\overline{2 \vee 2} \vee 2 = 3 \vee 2 = 2$$
$$\overline{3 \vee 3} \vee 3 = 2 \vee 3 = 2$$

Axioma b) nu are această proprietate, deoarece pentru cazul $3 \vee (2 \vee 1) = 3 \vee 1 = 1$.

Axioma c). Considerăm aceeaşi mulţime de semnificaţii ca şi mai sus: $\{0, 1, 2, 3\}$. Definim operatorii — și $\vee$ astfel:

p	0	1	2	3
$\bar{p}$	1	0	0	2

p \ q	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	2	0
3	0	3	3	3

Se poate demonstra matriceal că axiomele a), b) și d) și toate teoremele care se deduc din ele iau valoarea 0, în timp ce axioma c) nu are această proprietate. Într-adevăr, pentru cazul în care $p = 2$ și $q = 3$, axioma c) ia valoarea 3.

Axioma d). Considerăm din nou mulţimea de semnificaţii $\{0, 1, 2, 3\}$. Definim operatorii — și $\vee$:

p	0	1	2	3
$\bar{p}$	1	0	3	0

p \ q	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	2	0
3	0	3	0	3

În aceste condiţii, axiomele a), b) și c) și toate teoremele care se deduc din ele au valoarea 0, în timp ce axioma d) nu are

această proprietate. Într-adevăr, pentru $p = 3$, $q = 1$ și $r = 2$, axioma d) ia valoarea 2.

Demonstrarea completitudinii. Demonstrația decurge astfel. La sistemul de axiome se adaugă formula $p \vee q$. Iată secvența demonstrativă: 1) $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$;

2) $p \vee q$ (din 1 și 2, prin *modus ponens*, obținem 3);

3) $q \vee p$ (din 3, prin q/p, obținem 4);

4) $p \vee p$ (din 4, prin $p/\bar{p}$, obținem 5);

5) $\bar{p} \vee \bar{p}$

Din 4, prin regula corespunzătoare legii idempotenței, se deduce $6 \cdot p$. Din 5, prin regula idempotenței, se deduce 7) $\bar{p}$. În acest fel s-a dovedit o contradicție $8 \cdot p \cdot \bar{p}$. Completitudinea este în acest fel demonstrată.

II. TEORIA PREDICATELOR

Pînă acum nu am luat în considerare structura propoziției, ci numai faptul că ea poate fi adevărată sau falsă. În acest paragraf vom studia logica funcțiilor predicative, adică funcțiile care se referă la structura *obiect-proprietate*, respectiv *subiect-predicat*. Prin *predicat* vom desemna nu numai *însușiri*, ci și „însușiri derivate de la relații" *(Carnap)*. Astfel, va fi predicat nu numai „om", ci și „... fiul lui...", „...fratele lui..." etc. În dependență de numărul de indivizi la care se aplică predicatul, avem predicate monadice, diadice, și în general *n*-adice.

În ce privește subiectul, vom considera deocamdată că avem de a face numai cu indivizi.

Lista simbolurilor utilizate va fi următoarea: 1) $x, y, z, \ldots$ (variabile individuale); 2) $F, G, H, \ldots$ (variabile predicative); 3) $\forall$ (cuantorul universal); $\exists$ (cuantorul existențial). Prin atribuirea unei proprietăți unui subiect individual se obțin expresii de forma „x este F", „y este G" etc. De exemplu, „x este om", „y este animal", „x este fiul lui y". O expresie de forma „x este F" poartă numele de funcție propozițională (predicativă) dacă x este o parte variabilă, iar F este o proprietate determinată (de exemplu „om", „animal", „...fiul lui...") și dacă prin înlocui-

rea părţii variabile cu nume de indivizi reali expresia devine propoziţie (adevărată sau falsă).

Faptul că un predicat se atribuie unui individ se reprezintă astfel: Fx. Dacă predicatul este derivat de la o relaţie, vom scrie $F(x, y\ldots)$, unde $x, y\ldots$ reprezintă indivizii care intră în relaţia notată prin F.

Operaţia de scriere a unei variabile predicative la stînga unei variabile individuale sau a unei mulţimi de variabile individuale aşezate în paranteză o vom numi o *aplicaţie a variabilei predicative la variabilele individuale*. Rezultatul unei asemenea aplicaţii va fi o *schemă de funcţie propoziţională* (de exemplu $Fx, G(x, y)$, adică „F de x", „G de x, y"). Dacă vrem să indicăm faptul că proprietatea respectivă are loc pentru orice individ considerat, vom aplica semnul $\forall$ urmat de variabila individuală în faţa schemei care conţine această variabilă. Vom avea scheme de acest fel: $\forall xFx$, $\forall yFy$ etc. În caz că avem o schemă cu mai multe variabile, de exemplu $F(x, y, z, \ldots)$, vom scrie $\forall x \forall y \forall z\ldots F(x, y, z, \ldots)$.

Dacă vrem să scriem faptul că există indivizi care au proprietatea respectivă, vom aplica într-un mod asemănător celui de mai sus cuantorul $\exists$ şi vom obţine scheme noi, ca $\exists xFx$, $\exists x \exists y \exists z\ldots F(x, y, z, \ldots.)$.

Aplicarea cuantorilor la o schemă de funcţie propoziţională poartă numele de *cuantificare*. Schemele obţinute vor fi numite *scheme de propoziţii*. O schemă de propoziţie de forma $\forall x\ldots F(x, \ldots)$ se citeşte „pentru orice $x\ldots$ F de x", iar o schemă de forma $\exists x\ldots F(x, \ldots)$ se citeşte „există $x\ldots$ astfel că F de $x\ldots$". Punctele de suspensie arată că pot să mai existe şi alte variabile individuale. O variabilă necuantificată se numeşte *liberă*, iar o variabilă cuantificată se mai numeşte şi *fixă*, *aparentă* sau *legată*. În teoria predicatelor sînt preluate şi toate semnele din teoria funcţiilor de adevăr. Noţiunea de „formulă" sau de „expresie corectă" va fi generalizată corespunzător cu noua dezvoltare a limbajului. Vom avea următorul sistem de reguli pentru definirea expresiei corecte (formulei):

1. Orice formulă a calculului propozițiilor este formulă și în calculul predicatelor.

2. Orice aplicare a unui predicat la una sau la mai multe variabile individuale dă o formulă (schemă de funcții propoziționale).

3. Dacă A este formulă, $\bar{A}$ este formulă.

4. Dacă A, B sînt formule în calculul predicatelor, $A \& B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A = B$ vor fi de asemenea formule, cu condiția ca să nu apară o variabilă individuală în același timp liberă și legată.

5. Dacă A este o formulă care conține una sau mai multe variabile individuale libere, atunci prin cuantificare se obține din nou formulă.

O regulă generală se referă la noțiunea de *domeniu de acțiune* (pe care o vom lămuri mai jos): o variabilă nu trebuie să se afle în același timp în domeniul de acțiune al cuantorului universal și existențial. Conform cu regulile de mai sus, vor fi formule toate seriile de simboluri din stînga, dar nu vor fi cele din dreapta.

Reg.	Formule corecte	Formule care încalcă regulile
2.	$F(x,y)$	xF
3.	$Fx \rightarrow Gx$	$Fx \rightarrow G$
4 a.	$\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$	$\forall x\, Fx \rightarrow Gx$
4 b.	$\forall x\, Fx \rightarrow \exists x\, Gx$	$\forall x\, \exists x\, (Fx \rightarrow Gx)$

Alte exemple de formule corecte sînt următoarele:

$p \rightarrow Fx$, $\forall x\, Fx \rightarrow p$, $\exists y\,(Fy \vee \bar{p})$, $\overline{\exists y\,(Fy \& q)}$.

Domeniul de acțiune al cuantorului este acea parte din formulă care conține variabila legată de acest cuantor.

Dacă după aplicarea cuantorului nu se deschide o paranteză, atunci domeniul de acțiune cuprinde numai schema de funcție propozițională care urmează; dacă se deschide o paranteză, atunci domeniul de acțiune cuprinde partea de formulă care este

în paranteză. De exemplu, în formula $\forall xFx\&Gy$, domeniul cuantorului $\forall$ este schema Fx, iar în formulele $\forall x\ (Fx\ \&Gy)$, $\forall\ x\ (Fx \vee\ Gx)$, domeniile de acţiune sînt respectiv $(Fx\&Gy)$, $(Fx\ \vee\ Gx)$.

Raporturi între cuantori. O formulă care conţine o variabilă x se va nota $A\ (x)$ — citeşte „A care conţine pe x" — dacă ea conţine mai multe variabile $x, y,\ldots$ Se scrie $A\ (x, y)$. Între expresiile cuantificate se pot stabili următoarele echivalenţe importante:

$$1)\ \forall x\ A\ (x) = \overline{\exists x\ \overline{A(x)}};$$
$$2)\ \forall x\ \overline{A\ (x)} = \overline{\exists x\ A\ (x)};$$
$$3)\ \exists x\ A\ (x) = \overline{\forall x\ \overline{A(x)}};$$
$$4)\ \exists x\ \overline{A\ (x)} = \overline{\forall x\ A(x)}.$$

Aceste echivalenţe sînt generalizări ale legilor lui de Morgan. Generalizările se bazează pe două relaţii fundamentale între calculul propoziţiilor şi calculul predicatelor:

$$5)\ \forall x\ Fx = Fx_1\ \&\ Fx_2\ \&\ Fx_3\ \&\ldots\ \&\ Fx_n;$$
$$6)\ \exists x\ Fx = Fx_1 \vee Fx_2 \vee Fx_3 \vee\ldots \vee Fx_n.$$

Aceste formule sînt valabile pentru cazul cînd domeniul variabilei x este finit. Prima spune că afirmaţia „pentru orice x are loc F de x" este echipolentă cu „conjuncţia afirmaţiilor care spun despre fiecare individ în parte că are predicatul F". A doua spune că afirmaţia „există x pentru care are loc F de x" este echipolentă cu „disjuncţia afirmaţiilor care atribuie pe F fiecărui individ".

Vom presupune că domeniul lui x are numai doi indivizi: x_1, x_2. Dacă în legile lui de Morgan substituim variabilele p, q respectiv cu schemele de propoziţii individuale Fx_1, Fx_2, obţinem echivalenţele:

$$7)\ \overline{Fx_1\&Fx_2} = \overline{Fx_1} \vee \overline{Fx_2};$$
$$8)\ \overline{Fx_1 \vee Fx_2} = \overline{Fx_1}\ \&\ \overline{Fx_2}.$$

Dacă în formulele 7 şi 8 înlocuim conjuncţia cu expresia cuantificată universal (vezi 5) şi disjuncţia cu formula cuantificată existanţial (vezi 6), obţinem

$$\overline{\forall x\ Fx} = \exists x\ \overline{Fx} \text{ şi } \overline{\exists xFx} = \forall x\overline{Fx}.$$

De la aceste formule se poate ajunge la echivalențele 4 și respectiv 2 prin două generalizări: domeniul lui x este un domeniu infinit și în locul lui Fx considerăm o formulă oarecare A care conține pe x liber.

În ce privește echivalențele 1 și 3, ele se obțin generalizînd formulele

$$9)\ Fx_1 \& Fx_2 = \overline{\overline{Fx_1} \vee \overline{Fx_2}};$$

$$10)\ Fx_1 \vee Fx_2 = \overline{\overline{Fx_1} \ \& \ \overline{Fx_2}}.$$

Poziția și ordinea cuantorilor. Într-o formulă, cuantorii pot să ocupe locuri diferite. Cînd toți cuantorii se află în față, de exemplu $\forall x \forall y A (x,y)$, $\exists x \exists y A (x,y)$, $\forall x \exists y A (x,y)$, grupul lor poartă numele de „prefixul formulei". Prefixul formulei $\forall x \forall y A (x,y)$ este grupul $\forall x \forall y$. Dacă prefixul este format numai din cuantori de același fel (de exemplu $\forall x \forall y$, $\exists x \exists y$), el se numește *omogen*, în caz contrar (de exemplu $\forall x \exists y$) se numește *eterogen*. Domeniul unui prefix este tot restul formulei. Deci cuantorii aflați în prefix au același domeniu de acțiune. Într-un prefix omogen, ordinea cuantorilor este indiferentă, cu alte cuvinte un asemenea prefix este comutativ. Acest fapt se exprimă în echivalențele

$$11)\ \forall x \forall y A (x, y) = \forall y \forall x A (x, y);$$

$$12)\ \exists x \exists y A (x, y) = \exists y \exists x A (x, y).$$

Într-un prefix eterogen, ordinea nu este indiferentă. În loc de echivalență avem aici o implicație:

$$13)\ \exists x \forall y A (x, y) \rightarrow \forall y \exists x A (x, y)$$

(cu alte cuvinte trecerea este permisă numai în sensul arătat de această formulă).

Distributivitatea în calculul predicatelor. Proprietatea distributivității și inversa ei (scoaterea termenului comun) reapar în legătură cu formulele cuantificate. În cazul în care are loc atît distributivitatea, cît și inversa ei, legea care le exprimă va avea forma echivalenței; în cazul în care avem numai una din aceste proprietăți, legea care o exprimă are forma implicației. Vom avea următoarele echivalențe:

$$14)\ \forall x (Fx \& Gx) = \forall x Fx \& \forall x Gx;$$

$$15)\ \exists x (Fx \vee Gx) = \exists x Fx \vee \exists x Gx.$$

Deci cuantorul universal este distributiv (şi poate fi scos ca termen comun) faţă de conjuncţie. La fel, cuantorul existenţial faţă de disjuncţie.

16) $\exists x\ (Fx\ \&\ Gx) \rightarrow (\exists x\ Fx\ \&\ \exists x Gx)$;

17) $(\forall x\ Fx \lor \forall x\ Gx) \rightarrow \forall x\ (Fx \lor Gx)$.

Cuantorul existenţial este distributiv faţă de conjuncţie (16), iar cuantorul universal poate fi scos ca termen comun pe lîngă disjuncţie (17).

18) $\forall x\ (Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\forall x Fx \rightarrow \forall x Gx)$;

19) $(\exists x Fx \rightarrow \exists x\ Gx) \rightarrow \exists x\ (Fx \rightarrow Gx)$.

Cuantorul universal este distributiv faţă de implicaţie (18), iar cuantorul existenţial poate fi scos ca termen comun pe lîngă implicaţie (19).

Dualitatea cuantorilor. Aşa cum operatorii & şi V erau duali, la fel sînt duali cuantorii $\forall$ şi $\exists$. Noţiunea de formulă duală se poate generaliza astfel: dacă avem o formulă A cuantificată care nu conţine alţi operatori decît &, V şi — , formula care se obţine din ea prin înlocuirea fiecăruia dintre semnele &, V, $\forall$, şi $\exists$ cu dualul său se va numi *formulă duală cu A* şi se va nota prin A^*. Conform cu noua generalizare, în calculul predicatelor vom avea două principii de dualitate:

20) Dacă $A = B$ atunci $A^* = B^*$;

21) Dacă $A \rightarrow B$ atunci $B^* \rightarrow A^*$.

Formulele 2 şi 4, 5 şi 6, 7 şi 8, 9 şi 10, 11 şi 12, 14 şi 15 constituie perechi de formule duale în sensul regulii 20, iar formulele 16 şi 17, 18 şi 19 constituie perechi de formule duale în sensul regulii 21.

Cum să negăm o expresie cuantificată?

O expresie cuantificată se neagă conform cu echivalenţele 1—4: se înlocuieşte cuantorul dat cu dualul său şi se pune negaţia pe domeniul de acţiune al cuantorului. Dacă cuantorii formează un prefix, restul formulei se neagă conform cu regulile din calculul propoziţiilor (în general, formula care urmează

după prefix se comportă ca o formulă a calculului propoziţiilor). Negaţia formulei $\forall x\ (Fx \rightarrow Gx)$ este $\exists x\ \overline{(Fx \rightarrow Gx)}$, iar negaţia formulei $\exists x\ (Fx \vee Gx)$ este $\forall x\ \overline{(Fx \vee Gx)}$. Domeniul de acţiune poate fi transformat apoi conform regulii lui de Morgan, astfel că vom obţine $\forall x\ (\overline{Fx}\ \&\ \overline{Gx})$.

Cum să transcriem expresii de forma A, E, I, O în limbajul predicatelor?

În logica generală, simbolurile *A*, *E*, *I* şi *O* reprezintă respectiv judecăţile de forma următoare: Toţi *S* sînt *P*, Nici un *S* nu este *P*, Unii *S* sînt *P* şi unii *S* nu sînt *P*. Aceste judecăţi stau la baza silogisticii lui Aristotel. Aceste forme de judecăţi pot fi transpuse în calculul predicatelor conform cu următoarele echipolenţe fundamentale:

22) Toţi *S* sînt *P* $= \forall x\ (Sx \rightarrow Px)$;
23) Toţi *S* nu sînt *P* $= \forall x\ (Sx \rightarrow \bar{P}x)$;
24) Unii *S* sînt *P* $= \exists x\ (Sx\ \&\ Px)$;
25) Unii *S* nu sînt *P* $= \exists x\ (Sx\ \&\ \bar{P}x)$.

De exemplu, conform cu echipolenţa 22, judecata „Toţi oamenii sînt muritori" se va scrie astfel: „Dacă om (x), atunci muritor (x)". În transcrierea conform cu echipolenţele 22—25 avem în vedere că în silogistica lui Aristotel *S* şi *P* sînt termeni generali şi *nu au sferă vidă*. În logica matematică, predicatele *F*, *G*, *H*,... pot să fie şi cu sferă vidă. Tocmai de aceea schemele $\forall x\ (Sx \rightarrow Px)$, $\forall x\ (Sx \rightarrow \bar{P}x)$ etc. nu sînt decît cazuri particulare ale schemelor corespunzătoare $\forall x\ (Fx \rightarrow Gx)$, $\forall x\ (Fx \rightarrow \bar{G}x)$ etc., adică acele cazuri particulare în care *F* şi *G* sînt termeni generali cu sferă nevidă.

Forme normale. Noţiunea de formă normală din calculul propoziţiilor se poate generaliza şi la calculul predicatelor. Dacă o formulă *A* din calculul predicatelor este transformată într-o formulă *B* astfel că $B = A$, în *B* nu apar alţi operatori decît &, ∨ şi —, iar negaţia cade numai pe variabilele predicative şi propoziţionale, atunci *B* se numeşte *redusa* lui *A*.

O formă redusă este formă normală dacă: a) nu conţine cuantori şi este o formă normală booleeană, sau dacă b) cuantorii formează un prefix şi domeniul de acţiune al prefixului este în forma normală booleeană.

Exemplu. Formula $\exists x \exists y (\bar{F}y \vee Gy)$ este o formă normală pentru formula $\forall xFx \rightarrow \exists yGy$.

Cum se reduce o expresie predicativă la forma normală? Dacă ea este o expresie fără cuantori, se procedează exact ca în calculul propoziţiilor. Dacă ea este o formulă cuantificată, se procedează astfel: a) se construieşte redusa ei (în presupunerea că nu este deja redusă), b) se redenumesc variabilele în aşa fel ca fiecare cuantor să lege o variabilă diferită, c) se scot cuantorii în faţă în ordinea în care ei apar în formulă, d) domeniul este adus la una dintre formele normale booleene.

Exemplu. Să se aducă la forma normală expresia $\forall xFx \rightarrow \exists xGx$. Eliminăm implicaţia: $\overline{\forall xFx} \vee \exists xGx$. Coborîm negaţia pe variabila predicativă: $\exists x\bar{F}x \vee \exists xGx$. Redenumim pe x din partea $\exists xGx$ cu y şi obţinem $\exists x\bar{F}x \vee \exists yGy$ (redenumirea putea fi aplicată la prima parte $\exists x\bar{F}x$). Scoatem cuantorii în faţă şi obţinem forma normală: $\exists x \exists y (\bar{F}x \vee Gy)$.

În afară de forma normală definită mai sus, există o formă normală specială, denumită, după numele descoperitorului ei, *forma normală Skolem*.

O formulă este *formă normală Skolem* dacă ea este o transformare a formei normale astfel că nici un cuantor existenţial (în caz că există) nu urmează după vreun cuantor universal. Forma normală Skolem nu este obligatoriu echivalentă cu formula iniţială, ci ele se află într-o altă relaţie care poartă numele de *echivalenţă deductivă*.

Expresiile următoare sînt forme normale Skolem: $\exists x \exists y (Fx \& Fy)$, $\forall x \forall y (Fx \vee \bar{F}y)$, $Fx \& Fy$.

Calculul axiomatic al predicatelor. Dacă la cele patru axiome ale calculului propoziţiilor adăugăm următoarele două legi ale calculului predicatelor, obţinem un sistem axiomatic pentru calculul predicatelor:

e) $\forall xFx \rightarrow Fy$;

f) $Fy \rightarrow \exists xFx$.

Pe lîngă aceste axiome se folosesc următoarele reguli: 1) regula substituţiei, 2) regula *modus ponens*, 3) regula redenumirii, 4) regulile cuantorilor.

1. *Regula substituţiei*. Se formulează pentru cele trei tipuri de variabile: propoziţionale, individuale, predicative.

1α. Într-o formulă A putem înlocui o variabilă propoziţională cu o formulă B dacă se respectă condiţiile: a) variabila propoziţională este înlocuită pretutindeni unde apare în A; b) B nu conţine variabile individuale libere care în A sînt legate sau variabile individuale legate care în A sînt libere; c) dacă variabila propoziţională se află în domeniul de acţiune al unui cuantor, atunci variabila legată de acest cuantor nu intră în B.

1β. O variabilă individuală liberă poate fi substituită cu orice altă variabilă individuală dacă se respectă condiţiile: a) substituţia se face pretutindeni unde variabila apare în formulă; b) variabila cu care înlocuim nu apare legată în formula dată.

1γ. Substituţia pentru variabile predicative. Fie o formulă A care conţine predicatul F, pe scurt A $[F\ (...)]$. F conţine n variabile individuale (libere sau legate). F poate fi înlocuit cu o formulă B care conţine *cel puţin n variabile libere* dacă: a) variabilele libere ale lui B nu apar ca legate în A; b) variabilele legate ale lui B nu apar libere în A; c) după substituţie nici o variabilă nu trebuie să apară cuantificată diferit în acelaşi domeniu de acţiune.

Această parte a regulii substituţiei necesită încă unele explicaţii. Presupunem că F conţine un număr n de variabile, pe care le notăm astfel: x_1, x_2, ..., x_n, deci vom avea $F\ (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$. Presupunem în continuare că F apare de m ori în A şi vom nota diferitele sale apariţii cu F_1, F_2, ..., Fm. Variabilele individuale pentru F_i şi F_j (două apariţii oarecare ale lui F în formulă) pot fi asemenea sau diferite. Formula B conţine cel puţin n variabile *libere* pe care convenim să le ordonăm astfel: y_1, y_2,..., y_n, ..., pe scurt $B\ (y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n,\ ...)$, unde y_i şi y_j pot fi şi identice.

Substituţia se produce astfel: a) stabilim pentru orice F_i o corespondenţă astfel că fiecărui x_i îi corespunde un singur y_i

(şi anume acela care are acelaşi indice); b înlocuim în B pe fiecare y_i cu corespondentul său x_i; c) formula B astfel obţinută, adică $B(x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)$, poate fi pusă în locul lui F_i.

Exemplu. Să desemnăm prin A formula $\forall x \exists y\, [F(x, y) \rightarrow \rightarrow F(x,z)]$, iar prin B formula $\exists n [H(n, t) \,\&\, H(n, s)]$. Să se substituie B în locul lui F. Vedem că B satisface condiţiile impuse pentru a putea fi substituit (F conţine două variabile, iar B două variabile *libere*). F apare de două ori: $F_1(x,y)$, $F_2(x, z)$; vom avea în genere $F_i(x_1, x_2)$. Pentru $F_1(x_1, x_2)$, $x_1 \equiv x$, iar $x_2 \equiv y$. Pentru $F_2(x_1, x_2)$, $x_1 \equiv x$, iar $x_2 \equiv z$. În formula B avem variabilele n, t, n, s, deci $B(n, t, n, s)$. Ordonăm variabilele libere astfel că $y_1 \equiv t$ şi $y_2 \equiv s$. Stabilim corespondenţe între $B(y_1, y_2, \ldots)$ şi $F_i(x_1, x_2)$:

$$\begin{cases} F_1(x, y) \\ B(t, s, \ldots) \end{cases} \text{şi} \begin{cases} F_2(x, z) \\ B(t, s, \ldots) \end{cases}$$

Înlocuim în B variabilele cu corespondentele lor din F_i şi obţinem: $B_1(x, y, \ldots)$ şi $B_2(x, z, \ldots)$, adică, revenind la formula pe care o reprezintă B, vom avea: $\exists n[H(n, x) \,\&\, H(n, y)]$ şi $\exists n[H(n, x) \,\&\, H(n, z)]$, formule pe care le vom substitui respectiv în locul lui F_1 şi F_2 din A şi vom obţine:

$\forall x \exists y\, \{\exists n\, [H(n, z) \,\&\, H(n, y)] \rightarrow \exists n\, [H(n, x) \,\&\, H(n, z)]\}$.

2. *Regula modus ponens* (ca şi în calculul propoziţiilor).

3. *Regula redenumirii*. O variabilă legată poate fi înlocuită cu o altă variabilă (care după înlocuire va apărea de asemenea legată) în întreg domeniul de acţiune din care ea face parte, cu condiţia ca după înlocuire să se obţină din nou formulă.

4. *Regulile cuantorilor*. α) Din $A \rightarrow B(x)$ se deduce $A \rightarrow \forall x B(x)$ (x este liber în B şi nu apare în A); β) din $B(x) \rightarrow A$ se deduce $\exists x B(x) \rightarrow A$ (x este liber în B şi nu apare în A).

Exemple de teoreme

Teorema 1. $\forall x(Fx \vee \bar{F}x)$. Pornim de la $p \vee \bar{p}$, în care substituim p cu Fx şi obţinem $Fx \vee \overline{Fx}$. De aici, prin regula 4α, obţinem $\forall x(Fx \vee \bar{F}x)$.

Teorema 2. $\forall x Fx \rightarrow \exists x Fx$. Se demonstrează din ax. e) şi f) prin regula tranzitivităţii.

Teorema 3. $\forall x\ (A \vee Fx) \rightarrow A \vee \forall x Fx$.

Demonstrație. Prin substituție în axioma e) și conform cu regula redenumirii obținem $\forall y\ (A \vee Fy) \rightarrow A \vee Fx$. Prin înlocuirea lui A cu $\overline{\overline{A}}$ obținem $\forall y\ (A \vee Fy) \rightarrow \overline{\overline{A}} \vee Fx$. De aici prin prescurtare se obține $\forall y (A \vee Fy) \rightarrow (\bar{A} \rightarrow Fx)$. Prin conjugarea antecedenților se obține $[\forall y (A \vee Fy) \& \bar{A}] \rightarrow Fx$. Prin regula cuantorilor rezultă: $[\forall y\ (A \vee Fy)\ \&\ \bar{A}] \rightarrow \forall x Fx$, de unde prin regula inversă conjugării antecedenților, regula redenumirii și a implicației obținem teorema 3.

Logica predicatelor poate fi extinsă în următoarele feluri: 1) se introduc operatori noi, operatorul descripției (ι-operator) și operatorul abstracției (λ-operator); 2) predicate de predicate; 3) cuantificarea predicatelor.

În scopul asimilării expresiilor descriptive (de exemplu „Mihail Sadoveanu este autorul romanului *Nicoară Potcoavă)* se introduce operatorul descripției, notat cu (ιx). O expresie descriptivă se notează $(\iota x)\ F_1 x$ (citește: „acel x astfel că x este F_1").

Pentru a reprezenta expresiile de forma „acei x astfel că Fx", se introduce operatorul abstracției (λx). Corespunzător vom avea schema $\lambda x Fx$ (citește: „acei x astfel că Fx").

Pe lîngă predicatele de indivizi F (...), G(...), ... se introduc predicatele de predicate de indivizi, care pot fi notate, de exemplu, cu literele φ, ψ ,... Vom avea expresii de forma $\varphi(F)$, $\psi(G)$, ... De asemenea se pot introduce predicate de predicate de predicate de indivizi ș.a.m.d.

În acest fel obținem logici de diferite *ordine*. Predicatele, la rîndul lor, pot fi cuantificate, de exemplu, astfel: $\forall F F(x)$, $\exists F F(x)$ etc.

III. TEORIA CLASELOR

Considerăm în continuare că avem de-a face cu universul indivizilor. Dacă în acest univers separăm o porțiune cu ajutorul unei proprietăți, această porțiune va fi o *clasă;* de asemenea tot

restul universului va forma o clasă. Astfel vom avea clasa mamiferelor, clasa păsărilor ş.a.

Indivizii la care se aplică proprietatea respectivă vor fi numiţi *elemente* ale clasei determinate de proprietate.

Vom nota elementele cu literele x, y, z, ... Clasele vor fi notate sau cu ajutorul literelor care desemnează proprietăţi (F, G, H, ...), sau cu ajutorul literelor mari de la sfîrşitul alfabetului latin X, Y, Z, ... În continuare vom avea încă următorul sistem de simboluri:

a) Faptul că un element x aparţine clasei X se va nota prin $x \in X$ („x aparţine lui X").

b) Prin 1 vom desemna clasa universală (universul), iar prin 0 clasa complementară universului, adică clasa vidă. Exemple de clase vide: clasa *oamenilor din Lună, clasa centaurilor, clasa îngerilor*. Clasele vide nu conţin nici un element.

c) Clasa complementară unei clase X se va nota prin $\bar{X}$ („non-X").

d) Expresia „$X \cup Y$" („X sau Y") va desemna *suma* (reunirea) obiectelor a două clase, adică clasa obiectelor care se conţin fie în clasa X, fie în clasa Y, fie în amîndouă. De exemplu, clasa care rezultă din reunirea clasei studenţilor şi clasei sportivilor formează clasa indivizilor care *studiază sau fac sport*.

e) Expresia „$X \cap Y$" („X şi Y") desemnează *produsul* (intersecţia) claselor, adică o clasă de obiecte care aparţin atît lui X, cît şi lui Y. De exemplu, clasa *studenţilor-poeţi* cuprinde elemente care aparţin concomitent clasei studenţilor şi clasei poeţilor.

f) $X \subset Y$ („X e cuprins în Y") este *incluziunea* claselor. De exemplu, *clasa mamiferelor* este cuprinsă în *clasa animalelor*.

g) Faptul că două expresii care desemnează clase sau operaţii asupra claselor sînt identice se va nota prin $\equiv$ (de exemplu $X \equiv Y$).

Operaţiile de reunire şi de intersecţie sînt comutative, asociative şi tranzitive:

1) $X \cup Y \equiv Y \cup X$
2) $X \cap Y \equiv Y \cap X$ } comutativitate;

3) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$
4) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$ } asociativitate;

5) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ }distributivitate.
6) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ }

O clasă și complementara sa nu pot forma o intersecție, ceea ce se scrie:

7) $\overline{X \cap \overline{X}}$ sau

8) $X \cap \overline{X} \equiv 0$ (nu există elemente care să aparțină concomitent lui X și $\overline{X}$). Orice clasă are o clasă complementară ei, cu care formează o sumă identică cu universul:

9) $X \cup \overline{X}$;

10) $X \cup \overline{X} \equiv 1$.

Clasa complementară universului este clasa vidă:

11) $\overline{1} \equiv 0$

Clasa complementară clasei vide este universul:

12) $\overline{0} \equiv 1$

O clasă include toate elementele ei:

13) $X \subset X$.

Semnul incluziunii poate fi considerat ca o prescurtare:

14) $X \subset Y \equiv \overline{X} \cup Y$.

Calculul claselor construit cu mulțimea operatorilor $\{-, \cup, \cap\}$ este izomorf cu calculul propozițiilor construit cu operatorii $\{-, \vee, \&\}$.

Așa cum în logica propozițiilor putem considera că avem de-a face numai cu două valori, în logica claselor putem socoti că avem de-a face numai cu două clase: 1 (universul) și 0 (clasa vidă). Toate problemele algebrei propozițiilor sînt probleme și pentru algebra claselor. Logica claselor poate fi extinsă prin utilizarea relației de apartenență ($\in$) și a cuantorilor. În acest caz, semnul incluziunii se reduce prin definiție la $\in$:

15) $X \subset Y \equiv \forall x[(x \in X) \rightarrow (x \in Y)]$.

Semnele logicii propozițiilor nu fac parte din semnele logicii claselor, ci din metalogica claselor (ele ne ajută să vorbim despre relațiile dintre expresiile logicii claselor). Semnul $\in$ corespunde operației de predicație, adică $x \in F$ este o expresie izomorfă cu Fx. Oricărei expresii Fx îi putem asocia o expresie $x \in F$ și

reciproc. Ca urmare, legile calculului monadic al predicatelor pot fi transpuse în calculul claselor:

16) $\forall x(x \in F) \rightarrow (y \in F)$;

17) $(x \in F) \rightarrow \exists y(y \in F)$.

Calculul claselor poate fi axiomatizat ca și calculul propozițiilor. Ca și calculul propozițiilor, calculul claselor este imaginea formală a unui sistem de legi logice, legile care apar în funcție de structurile extensionale. *Logica claselor ne arată cum trebuie să raționăm corect cînd avem de-a face cu raporturi și operații extensionale.*

O mare parte din modurile silogisticii lui Aristotel pot fi reprezentate în logica claselor. Dăm ca exemplu reprezentarea silogismului Barbara: Dacă toți *B* sînt *C* și toți *A* sînt *B*, atunci toți *A* sînt *C*:

$$[(B \subset C) \ \& \ (A \subset B)] \rightarrow (A \subset C).$$

IV. TEORIA RELAȚIILOR

Teoria relațiilor studiază modurile de raționare din punctul de vedere al proprietăților celor mai generale ale relațiilor.
Simbolismul teoriei relațiilor.

a) $x, y, z, \ldots$ obiecte care intră în relații;

b) $P, Q, R, \ldots$ relații;

c) | produsul relațiilor (ex. xRy/yRz).

Orice aplicare a semnelor $P, Q, R, \ldots$ la două sau la mai multe variabile $x, y, z, \ldots$ dă o schemă de funcție relațională: $P(x, y), Q(x, y, z), R(x, y, z, n, \ldots)$. În dependență de numărul obiectelor care intră în relație, ea va fi o relație diadică, triadică și în general *n*-adică. Ne vom limita aici la relațiile diadice (de exemplu $x > y$, $x \neq y$).

2. O relație diadică poate fi reprezentată și astfel: xRy. Obiectele x, y se vor numi termenii relației. În expresia xRy, x desemnează *antecedentul* (precedentul, predecesorul), iar y *succedentul* (consecventul, succesorul) relației. Mulțimea valorilor care satisfac pe x (sau mulțimea obiectelor care formează antecedentul relației) se numește *domeniu*, iar mulțimea valo-

rilor care satisfac pe y (sau mulţimea obiectelor care formează succedentul relaţiei) se numeşte *codomeniu*. *Cîmpul* relaţiei este reuniunea domeniului şi a codomeniului. Cîmpul relației este *omogen* dacă domeniul şi codomeniul sînt formate din acelaşi tip de obiecte, astfel că unul şi acelaşi obiect poate să apară într-un caz ca antecedent, în altul ca succedent. Cîmpul relaţiei este *eterogen* cînd nu sînt îndeplinite condiţiile pentru a fi omogen.

Să exemplificăm noţiunile introduse aici. Fie relaţia $x>y$. Cîmpul acestei relaţii este un cîmp omogen, căci atît domeniul, cît şi codomeniul este format din numere. Nu există o separaţie netă între domeniu şi codomeniu. Astfel, în cazul $2>1$ valoarea 2 face parte din domeniu, iar în cazul $3>2$ valoarea 2 face parte din codomeniu.

În relaţia *x este soţul lui y* cîmpul este eterogen, căci nici un obiect al domeniului (mulţimea bărbaţilor) nu poate face parte din codomeniul (mulţimea soţiilor) relaţiei, după cum nici un obiect din codomeniu nu poate face parte din domeniu. *Proprietăţile formale ale relaţiilor.*

a) *Reflexivitatea*. O relaţie R este reflexivă dacă pentru orice x are loc xRx (relaţia $=$ este reflexivă deoarece este adevărat $x = x$).

b) *Simetria*. O relaţie R este simetrică dacă pentru orice x şi pentru orice y este adevărat $xRy \equiv yRx$ (relaţia $x = y$ este simetrică: $(x = y) \equiv (y = x)$).

c) *Tranzitivitatea*. O relaţie R este tranzitivă dacă pentru orice x, orice y şi orice z este adevărat $(xRy \& yRz) \rightarrow xRz$ (relaţia $=$ este tranzitivă: $[(x = y) \& (y = z)] \rightarrow (x = z)$).

Din negarea acestor proprietăţi se obţin altele. Vom folosi prefixul *ne-* pentru a desemna proprietățile obţinute prin negare parţială (nu au loc în genere, dar pot avea loc pentru unele cazuri) şi prefixele *a-* sau *in-* pentru a marca negarea totală (nu există obiecte pentru care să aibă loc proprietatea).

d) Prin negare parţială obţinem proprietăţile: *nereflexivitate*, *nesimetrie* şi *netranzitivitate*.

e) Prin negare totală obţinem proprietăţile: *ireflexivitate*, *asimetrie*, *intranzitivitate*.

Relația $\geqslant$ este nereflexivă, nesimetrică și tranzitivă. Într-adevăr, există cazuri cînd are loc $x \geqslant x$ și $x \geqslant y \equiv y \geqslant x$. Așa stau lucrurile cînd x și y au aceeași valoare, de exemplu 2:

$$2 \geqslant 2 \text{ și } 2 \geqslant 2 \equiv 2 \geqslant 2.$$

Relația $>$ este ireflexivă, asimetrică și tranzitivă. Nu există numere pentru care să fie adevărat $x > x$ și $x > y \equiv y > x$. Relația *x este prieten cu y* este netranzitivă, căci nu este adevărat totdeauna că „dacă x este prieten cu y și y este prieten cu z, x este prieten cu z".

f) *Univocitatea*. O relație este univocă dacă fiecărui antecedent îi corespunde numai un succedent. Astfel relația de *succesor* în sistemul lui Peano este o relație univocă.

g) *Biunivocitatea*. O relație este biunivocă atunci cînd fiecărui antecedent îi corespunde un singur succedent și fiecărui succedent un singur antecedent. Astfel este relația de *succesor* în cîmpul numerelor întregi (pozitive și negative).

Operații asupra relațiilor

Vom numi *conversiune* trecerea de la relația xRy la relația yRx. Astfel, trecerea de la „x este prietenul lui y" la „y este prietenul lui x" este o conversiune. Această conversiune este asemănătoare cu aceea din logica generală. În logica matematică însă există și o altă conversiune.

Trecerea de la relația xRy la o relație $yR^{c}x$ (cu termenii inversați) se va numi conversiune. Astfel, trecerea de la relația „mai mic" ($<$) la relația „mai mare" ($>$) este o conversiune. La fel, trecerea de la „x este la stînga lui y" la „y este la dreapta lui x" este o conversiune. De remarcat este că în timp ce conversiunea clasică nu duce totdeauna la o judecată adevărată, conversiunea logică-matematică, dimpotrivă, duce totdeauna la o asemenea judecată adevărată dacă prima judecată este adevărată.

Augustus de Morgan (1806—1878), cel care a pus bazele teoriei relațiilor, a descoperit următoarele proprietăți ale conversiunii (inversiunii):

a) negațiile judecăților converse sînt reciproc converse;

b) conversele unor judecăți care se neagă reciproc se neagă de asemenea reciproc;

c) negarea conversei este identică cu conversa negației;

d) dacă o relație R atrage după sine o relație Q, atunci conversa lui R va atrage de asemenea conversa lui Q.

O altă operație este produsul (înmulțirea) relațiilor. A înmulți o relație xRy cu o relație yQz înseamnă a stabili o nouă relație xPz. Exemplu: dacă x este tatăl lui y și y este soțul lui z, atunci x este socrul lui z. Uneori putem scrie relațiile numai cu semnele P, Q, R, ... Ca urmare, produsul relațiilor se poate scrie astfel: $P | R$ („P înmulțit cu R").

Dacă se înmulțește o relație cu sine, atunci vom obține puteri ale relațiilor: R^0, R^1, R^2, ... R^n,...

Conversa unei relații cu puterea n va fi scrisă R^{-n}.

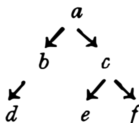
Una dintre cele mai interesante probleme ale teoriei relațiilor este clasificarea lor. Astfel sînt relații de ordine, relații ereditare, relații de alegere etc. Ca și în cazul teoriilor logice anterioare, teoria relațiilor poate fi formalizată și axiomatizată.

Reprezentarea relațiilor. O relație xRy poate fi reprezentată fie scriind lista perechilor care o satisfac, fie prin vectori, fie prin matrice. Fie, de exemplu, relația „x este părintele lui y" aplicată la mulțimea membrilor $\{a, b, c, d, e, f\}$ a unei familii.

1. Lista perechilor care satisfac relația poate fi, de exemplu, următoarea:

$a R b$ $a R c$ $b R d$ $c R e$ $c R f$	(a este părintele lui b, a este părintele lui c etc.).

2. Reprezentarea vectorială va fi următoarea:



(săgeata arată orientarea relației și între ce membri are loc această relație).

3. Reprezentarea matriceală va fi următoarea:

$\vdash\!\!\rightarrow$	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
a		*v*	*v*			
b				*v*		
c					*v*	*v*
d						
e						
f						

(semnul $\vdash\!\!\rightarrow$ arată orientarea tabelului, iar semnul *v* că relația are loc între membrii care se află în dreptul său).

O dată cu teoria relaţiilor se încheie studiul legilor logice în funcție de tipul premiselor. O dezvoltare ulterioară a ei este posibilă la un nivel care pierde orice legătură imediată cu interpretarea; este vorba de studiul operaţiilor materiale care au loc în formalismele logice (logica combinatorică). Ne mulţumim doar s-o menționăm aici.

TABLA DE MATERII

SUMMARY

SOMMAIRE